И.Б. Бекбоев А.А. Айилчиев А.А. Борубаев

ГЕОМЕТРИЯ

7-9

И.Б.БЕКБОЕВ, А.А. БОРУБАЕВ, А.А.АЙИЛЧИЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Ўрта мактабларнинг 7-9 синфлари учун дарслик

тўлиқланган иккинчи нашридан таржима

Қирғизистон таълим ва фан вазирлиги тасдиқлаган

Қўлингиздаги ушбу дарслик Қирғизистондаги ўзбек мактаблари учун "Дарсликлар яратиш маркази" томонидан тайёрланди. Дарслик ҳақидаги фикр-мулоҳазаларингизни "Марказ" маъмуриятига ёзма равишда билдиришингизни илтимос қиламиз

Бизнинг манзил: Ўш шаҳри, Г. Айтиев
кўчаси, 25 уй.

Таржимон: Амурханова Меҳринса

КИРИШ

Ҳурматли ўқувчи!

Геометрия – қадимги қизиқарли фанлардан бири. Бу фан инсонларнинг кундалик турмуш эҳтиёжларидан келиб чиққан. Турмушда учрайдиган катталиклар: масофа, ҳажм ва бошқаларни ўлчаш геометрия фанида асосланган.

Геометрия грекча сўз бўлиб, «Ерни ўлчаш» деган маънони билдиради. Бундай маънони билдиришининг сабаби дастлабки ўлчовлар фақат ер сиртида бажарилганлиги учун бўлса керак.

Геометрия - бу фигураларнинг хоссалари ҳақидаги фан.

Геометриянинг дастлабки тушунчалари билан сиз 1-6 синфлардаёқ танишгансиз. Бу синфларда геометрик материаллар арифметика билан биргаликда берилган. 7-синфдан бошлаб геометрияни мустақил бир фан қатори ўрганасиз. Уни ўрганиш ўрта мактабни тамомлагунча давом этади ва анча чуқурлаштирилади, янги тушунчалар берилади.

Геометриянинг бу курсида фигураларнинг хоссалари ўрганилади, уларнинг катталикларини ўлчаш назариялари қараб чиқилади. Демак, геометрияни келажакда оддий ишчи деҳқон, инженер, архитектор, рассом, шифокор, акционер, савдогар ва бошқалар ҳам қўллана олади. Улар дастлаб берилган нарсанинг (фигуранинг) расмини қоғозга туширишади, бу расм бўйича фигуранинг (жисмнинг) зарур ўлчамларини олишади, хоссаларини ўрганишади. Охирги бобда стереометрияга оид, аниқроқ айтганда фазодаги геометрик фигуралар ва уларнинг хоссалари ҳақида қисқача маълумотлар берилган.

Дарслик ўн бир бобдан иборат. Бунда 7-9 синфларда ўрганилиши керак бўлган геометриянинг давлат дастурига мос материаллари берилган. У асосан планиметрик саволларни ўз ичига олади. Планиметрияда текисликдаги геометрик фигуралар ва уларнинг хоссалари ўрганилади.

Дарсликнинг ҳар бир параграфининг охирида мавзуни мустаҳкамлаш, такрорлаш учун саволлар ва масалалар берилган. Бироз қийинроқ масалалар (*) билан белгиланган.

Бизнинг асосий маслаҳатимиз қуйидагича. Аввал асосий материални кунт билан ўқиб чиқиб, уни мукаммал ўзлаштириб, сўнг мавзуга тегишли масалаларни ечиш зарур. Мавзуни ўзлаштиришда ҳам, масалаларни ечишда ҳам тегишли чизмани чизиб, уни қўллана билиш талаб қилинади.

Энг асосий тушунчалар, хоссалар ва қоидалар алоҳида қора ҳарфлар билан ажратиб ёзилган. Уларни ёд олиш зарур. Дарсликда қандай боблар, параграфлар ифода этилганлигини билиш учун дарслик охирида берилган мундарижага мурожаат қилиш керак.

Шундай қилиб, дарсликда зарур бўлган чизмалар, мавзулар баён этилган. Уларни яхши ўзлаштириш кўпроқ меҳнат талаб қилади.

Сизларга муваффақият тилаймиз!

I БОБ ДАСТЛАБКИ ГЕОМЕТРИК ТУШУНЧАЛАР

1-§. НУҚТА, ТЎҒРИ ЧИЗИҚ, ТЕКИСЛИК

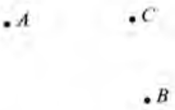
1.1. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА НУҚТА. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Геометрияда фигураларни ва уларнинг хоссаларини ўрганишда жуда кўп янги тушунчалар, терминлар билан танишишга тўғри келади. Бу янги тушунча ва терминларнинг маъноси ва ифода этилиши аввал маълум бўлган тушунчалар орқали берилади. Натижада янги тушунчанинг мазмунини, маъносини ифодаловчи гап бирикмаси - тасдиқ хосил бўлади. Бундай тасдиқга таъриф дейилади. Одатда янги тушунчага таъриф берганда аввал маълум бўлган тушунчалардан фойдаланамиз. Масалан, квадратга таъриф берганимизда бизга аввалдан маълум бўлган кесма, кесмалар тенглиги, тўғри бурчак ва бошқа тушунчалардан фойдаланамиз. Демак, ҳар доим янги тушунчага таъриф бериш учун аввалги маълум бўлган тушунчалардан фойдаланишга тўғри келади. Лекин бу жараённи энг дастлабки тушунчагача давом эттириш мумкин. Чунки энг дастлабки тушунчани таърифлаб айта олмаймиз. Сабаби ундан аввал аниқланган тушунча йўқ. Шунинг учун геометрияда айрим тушунчаларни таърифсиз қабул қилишга тўғри келади. Бундай таърифсиз қабул қилинадиган асосий тушунчаларга **нуқта, тўғри чизиқ, текислик ва тўплам** тушунчалари киритилган.

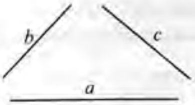
Шундай қилиб, геометрияни ўрганишни бошлагандаёқ таърифсиз қабул қилинган бундай тушунчаларни **асосий** ёки **бошланғич тушунчалар** деб аталади. Қолган тушунчаларнинг барчаси ўша асосий тушунчалар орқалигина таърифланади.

Асосий тушунчаларга таъриф берилмаганлиги туфайли уларни фикран маълум деб фараз қилиб, чизмада чизиб акс эттиришга тўғри келади.

Нуқта ўзининг эгаллаб турган ҳолатига қарабгина характерланади. Нуқталарни чизмада (тасвирлаб) кўрсатиш учун қалам учи билан белгилаб, уларни катта лотин ҳарфлари билан кўрсатиб ёзамиз. Масалан: *A,B,C*... нуқталари (1-расм).



1-расм



2-расм

Чизмада тўғри чизиқни тасвирлаш учун чизғичдан фойдаланамиз. Чизғични турли ҳолатда алмаштириб қўйиб, бир неча тўғри чизиқларни чизиш мумкин (2-расм). Уларни кичик лотин ҳарфлари орқали *a, b, c*, ... деб белгилаш мумкин.

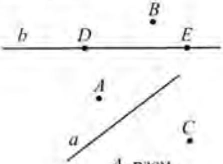
Тўғри чизиқни чексиз давом эттириб чизиш мумкин. Расмда уларнинг бўлакларигина чизиб кўрсатилди.

Столнинг сиртини, дераза ойнасининг юзини, синф доскасининг юзини текислик деб ҳисоблаш мумкин, лекин улар чекланган. Текисликни эса, ҳар тарафга чексиз чўзиш мумкин. Чизмада текисликни тасвирлаш учун қандайдир эгри чизиқлар билан чегараланган фигурадан ёки тўртбурчакдан фойдаланилади (3-расм).

Улар текисликнинг бир қисминигина ифодалайди. Текисликларни грек ҳарфлари α (альфа), β (бета), γ (гамма) ва бошқа ҳарфлар билан ёки оддийгина катта ҳарфлар билан белгиланади.

Лекин, геометриянинг планиметрия (лотинча «planum» сўзидан олинган бўлиб, ўзбекча «текислик» деган маънони беради) бўлимида барча фигуралар текисликда кўрилганлиги сабабли, бундан кейин чизмада текисликни доим ҳам чизиб кўрсатиш талаб қилинмайди, у маълум деб ҳисобланади.

3-расм



4- расм

МАШҚЛАР

1. 4-расмда нуқталар ва тўғри чизиқлар берилган. Уларни белгилаб ёзиб кўрсатинг. Нуқталар ва тўғри чизиқлар қандай белгиланади?

2. 4-расмдаги a тўғри чизиқда ётган K, L нуқталарини белгиланг. Шу икки нуқта орқали тўғри чизиқни қандай белгилаб ёзиш мумкин?

3. M нуқтани белгилаб, шу нуқта орқали a тўғри чизиқни ўтказинг. Шу нуқта орқали яна нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

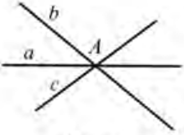
4. A ва B нуқталарини белгиланг. Шу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқни чизинг. Уни икки нуқта орқали белгилаб ёзинг. Шу тўғри чизиқни битта ҳарф орқали ҳам белгилаб кўрсатинг.

1.2. ТЕКИСЛИКДАГИ НУҚТАЛАРНИНГ ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАНИШИ

Энди нуқта билан тўғри чизиқнинг ўзаро жойланишини кўриб чиқамиз. Нуқтани текисликда хоҳлагандай қилиб белгилаш мумкин бўлганлиги сабабли уни тўғри чизиқда ҳам белгилаб кўрсатиш мумкин. У ҳолда тўғри чизиқ нуқталардан ташкил топган деб ҳисоблаш мумкин. a тўғри чизиқда ихтиёрий M нуқтани белгилаймиз (5-расм). Бу ҳолда M нуқта a тўғри чизиқда ётади ёки M нуқта a тўғри чизиққа тегишли дейилади ва уни қисқача $M \in a$ кўринишда белгиланади[1]. Баъзи ҳолларда a тўғри чизиқ M нуқта орқали ўтади, деб ҳам ҳисобланади.

5-расмда берилган B нуқта a тўғри чизиқда ётмайди, яъни B нуқта a тўғри чизиққа тегишли эмас, уни $B \notin a$ кўринишда белгиланади[2].

5-расм



6-расм

Шундай қилиб, асосий тушунча бўлиб ҳисобланган нуқталарни ҳам, тўғри чизиқларни ҳам текисликда белгилаш мумкин. Текисликда A нуқтани белгилаб, чизғич ёрдамида шу нуқта орқали ўтувчи бир нечта $a, b, c...$ тўғри чизиқларни чизиш мумкин (6-расм).

---

[1] - «$\in$» - тегишли тушунчасининг белгиланиши.

[2] - «$\notin$» - тегишли эмас тушунчасининг белгиланиши.

Демак, бир нуқта орқали ўтувчи чексиз кўп тўғри чизиқлар мавжуд деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда a, b, c... тўғри чизиқлар A нуқтада кесишади, деб айтилади.

7-расм

Текисликда A ва B нуқталар берилган бўлса, у ҳолда чизғичнинг бир қирраси ёрдамида берилган нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз (7-расм). Бу ҳолда A ва B нуқталари орқали фақат биргина тўғри чизиқ ўтади. Уни қисқача AB тўғри чизиқ деб белгиланади, демак, тўғри чизиқни икки ҳарф орқали ҳам белгилаш мумкин.

Юқорида баён қилинган асосий тушунчалардаги нуқта ва тўғри чизиқларнинг ўзаро жойланиши ҳақидаги тасдиқлар ўз-ўзидан маълум, улар исбот талаб қилмайди. Шунинг учун уларни **аксиома**[1]лар ёки асосий хоссалар кўринишида ифодалаш мумкин. Бу аксиомалар **теорема**[2]ларни исботлашда ва муҳокама қилишда кенг қўлланилади.

Бунда аниқланмаган асосий тушунчалар орасидаги асосий боғлиқликларни тушунтиришга тўғри келади, бундай боғланишлар сифатида **«ётади»**, **«орасида ётади»** сўзларини қўлланиш мумкин. Баъзида «ётади» сўзи ўрнига **«тегишли»** сўзи ҳам қўлланилади. Аввал текисликдаги нуқта ва тўғри чизиқларнинг ўзаро боғлиқлиги ҳақидаги асосий хоссаларига тўхталиб ўтамиз. Улар геометрияда асосий хоссаларнинг биринчи гуруҳини ташкил қилади ва тегишлилик хоссалари (аксиомалари) деб аталади. Улар қуйидагилар:

I_1. Ҳар қандай тўғри чизиқда унда ётган ва ётмаган нуқталар мавжуд.

II_2. Ихтиёрий икки нуқта орқали фақат битта тўғри чизиқ ўтади.

Бу асосий хоссаларни қўлланиб, қуйидаги хулосаларга келиш мумкин.

а) I_1 асосий хоссага асосланиб ҳар қандай тўғри чизиқда ётувчи нуқталарни доимо топиб, белгилаб олиш мумкин, уларнинг сони ҳақида чеклаш қўйилган эмас. Бундан кейин **ҳар бир тўғри чизиқда чексиз кўп нуқталар бор,** деган хулосани айтиш мумкин.

б) Текисликда икки тўғри чизиқ биттадан ортиқ умумий нуқтага эга бўлмайди, бошқача айтганда икки тўғри чизиқ фақат битта нуқтада кесишади. Агар текисликда a ва b тўғри

---

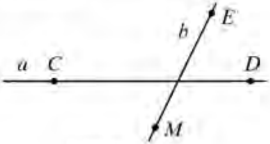
[1] Грекча сўз, исботсиз қабул қилинадиган тасдиқ маъносини беради.

[2] 2.4. - § га қаранг.

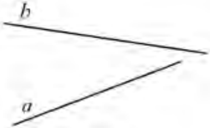
чизиқлари А ва В нуқталарда кесишади деб ҳисобласак, у ҳолда А ва В нуқталар орқали *a* ва *b* деган икки тўғри чизиқ ўтган бўлар эди. Бу I_1 хоссага зид. Демак, **текисликда ётган икки тўғри чизиқ бир нуқтада кесишади ёки кесишмайди**.

в) Чизғичдан фойдаланиб текисликда берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ чизиш мумкин. I_1 аксиома асосида бундай тўғри чизиқ фақат битта бўлади, бу тўғри чизиқ бутунича берилган текисликда ётади. Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг икки нуқтаси бир текисликда ётса, у ҳолда унинг барча нуқталари шу текисликда ётади, ёки бошқача айтганда, тўғри чизиқ бутунлай текисликда ётади, деган хулосани айтишимиз мумкин.

5. 8 - расмдаги нуқталарнинг қайсилари *a* тўғри чизиқда, қайсилари *b* тўғри чизиқда ётади? Қайсилари ётмайди? Уларни $\in$ ва $\notin$ белгилари орқали ёзинг.
6. 1-масаладаги нукталарнинг қайсилари *a* тўғри чизиқда, қайсилари *b* тўғри чизиқда ётади? Қайсилари тўғри чизиқда ётмайди? Уларни тегишли белгилар орқали ёзинг.
7. $M \in a$ ва $B \notin b$ ёзувларини чизмада қандай тасвирлаш мумкин? Сўз билан изоҳлаб беринг.
8. *a* тўғри чизиқ берилган. I_1,I_2 аксиомаларидан фойдаланиб, яна бошқа тўғри чизиқларни ўтказиш мумкинлигини кўрсатинг.
9. *a* ва *b* тўғри чизиқ берилган (9-расм). Улар кесишган *C* нуқтани кўрсатинг, *a*, *b* тўғри чизиқларида мос равишда А ва В нуқталарини белгилаб, берилган тўғри чизиқларни икки ҳарф орқали белгилаб ёзинг.
10. *AB* ва *AC* тўғри чизиқлари кесишади. а) улар кесишган нуқтани белгиланг. б) *BC* тўғри чизиғи *AB* тўғри чизиғи билан ҳам, *AC* тўғри чизиғи билан ҳам устма-уст тушмаслигини тушунтиринг (тегишли чизмани ўзингиз чизинг).



8-расм



9-расм

1.3. КЕСМА. НУР

Геометрияда кесма ва нур тушунчалари кенг қўлланилади. Улар тўғри чизиқнинг бўлаклари деб ифодаланади.

Тўғри чизиқда чексиз кўп нуқталар ётиши маълум. У ҳолда бу нуқталар тўғри чизиқда қандай тартибда жойлашган, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб бериш учун бир тўғри чизиқда ётган учта нуқтани кўриб чиқайлик.

a тўғри чизиқ ва унда ётган *A,B,C* нуқталарини олайлик. Бунда *C* нуқта *A* ва *B* нуқталар орасида ётади, деб айтиш мумкин. Худди шундай *C* нуқтани *B* ва *A* нуқталар орасида ётади, деб айтишимиз ҳам мумкин. Бироқ, *B* (ёки А) нуқта *A* ва *C* (В ва *C*) нуқталари орасида ётади, деб айта олмаймиз. Чунки А ва С (*B* ва *C*) нуқталари *B(A)* нуқтанинг бир тарафида ётади.

Ўша «орасида» деган тушунча орқали нуқталарнинг тўғри чизиқда ва текисликда жойлашувининг асосий хоссалари сифатида ифодалаш мумкин. Улар II гуруҳдаги асосий хоссаларни ташкил қилади ва жойлашиш нуқталарнинг тўғри чизиқда жойлашувларининг аксиомалари деб аталади. Унинг биринчи асосий хоссаси қуйидагича ифодаланади.

10-расм

II$_1$. Тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг фақат биттаси қолган иккитасининг орасида ётади.

Орасида ётади, деган тушунча кесма ва нур ҳақидаги тушунчаларни таърифлашга ёрдам беради.

Тўғри чизиқнинг ҳар қандай икки нуқтаси орасида ётган нуқталар тўплами **кесма** деб аталади. У ҳолда кесмани тўғри чизиқнинг икки нуқтаси орасидаги қисми деб тушуниш мумкин.

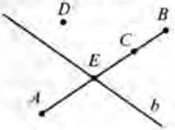
Демак, 10-расмда тўғри чизиқнинг А ва В нуқталари орасида ётган ихтиёрий С нуқталарининг тўплами кесмани аниқлайди. Бу кесма *AB* ёки *BA* орқали белгиланади. Баъзида кесмани фақат битта кичик ҳарф (*a,b...*) билан ҳам белгилаш мумкин. Бу ҳолда АВ кесма *a* тўғри чизиқда ётади, деб ҳисоблаш мумкин.

Кесмани алоҳида чизиб кўрсатиш мумкин (11-расм). АВ кесманинг А ва В нуқталари унинг **учлари** деб аталади.

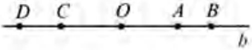
Тўғри чизиқда нуқталар чексиз кўп бўлганлиги сабабли, кесмаларда ҳам чексиз кўп нуқталар бор деб ҳисоблаймиз. Чунки А ва В нуқталари орасида ётган *C* нуқтани хоҳлагандай қилиб танлаш мумкин. Бунда *C* нуқта *AB* кесмада ётади, деб айтилади.

D нуқта эса *AB* кесмада ётмайди (11-расм). Агар *AB* кесма у орқали ўтмаган *b* тўғри чизиқ билан Е умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда AB кесма билан b тўғри чизиқ E нуқтада кесишади, деб айтилади (11-расм). У ҳолда Е нуқта AB кесмада ётади.

b тўғри чизиғи берилган бўлсин (12-расм). Бу тўғри чизиқда олинган ихтиёрий O нуқта уни икки бўлакка ажратади, уларнинг ҳар бирини **ярим тўғри чизиқ** деб атаймиз. A, B ва яна бошқа нуқталари ўша ярим тўғри чизиқларнинг бирида, C,D ва яна бошқа нуқталари эса иккинчисида ётади. Бундай O нуқта тўғри чизиқни бўлувчи нуқта ёки ярим тўғри чизиқларнинг бошланиш нуқтаси деб қабул қилинади.



11-расм



12-расм

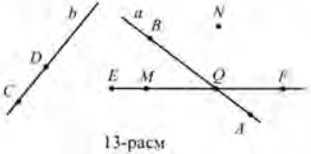
Бу ҳолда бир хусусиятни сезиш мумкин. O нуқта ярим тўғри чизиқларнинг бирида ётган ихтиёрий икки нуқта (масалан, А,В нуқталари ёки C, D нуқталари) бир томонида ётади. Бу юқоридаги асосий тушунчалар асосида II-группадаги асосий хоссаларнинг иккинчисини қуйидагидек ифодалашга тўғри келади.

II_2. Тўғри чизиқда ётган нуқта шу тўғри чизиқни икки ярим тўғри чизиққа ажратади. Ярим тўғри чизиқ нур деб аталади.

12-расмдаги ярим тўғри чизиқларни ёки нурларни икки ҳарф билан белгилаймиз: OA ёки OC. Бунда биринчи ҳарф нурнинг ёки ярим тўғри чизиқнинг бошки нуқтаси, иккинчиси эса ихтиёрий нуқтасини белгилайди.

Шундай қилиб, тўғри чизиқда ётган ихтиёрий нуқта уни икки нурга ажратади, бу нурлар ярим тўғри чизиқларни ташкил қилади. Демак, нур тўғри чизиқнинг бир қисми бўлиб ҳисобланади.

EF нур берилган бўлсин (13-расм). Бу нурда M нуқтани белгилаймиз. Бунда M нуқта шу нурда ётади, N нуқта эса нурда ётмайди.



13-расм

Нурда белгиланган EM кесма EF нурда ётади. Шунинг учун EM кесмани EF нурнинг бўлаги деб қараш мумкин.

Агар кесма (тўғри чизиқ) берилган нур билан умумий нуқтага эга бўлса (бўлмаса), у ҳолда кесма (тўғри чизиқ) билан нур ўша нуқтада кесишади (кесишмайди) деб айтилади. Масалан, 13-расмда берилган EF нур AB кесма (a тўғри чизиқ) билан Q нуқтада кесишади, CD кесма (b тўғри чизиқ) билан кесишмайди.

Текисликда ихтиёрий бир нуқта белгилаб олсак,бошланиши шу нуқтада бўлган чексиз кўп нурлар чизиш мумкин. Бундай натижа 1.2-§ да бир нуқта орқали ўтувчи чексиз кўп тўғри чизиқлар мавжуд, деган хулоса асосида келиб чиқади.

11. a тўғри чизиқда ётувчи A, B, C нуқталар берилган (14-расм). Уларнинг қайси бири қолган иккитасининг орасида ётади? C нуқта A билан B нинг орасида ётади деб айтиш мумкинми?
12. a тўғри чизиқда ётувчи A, B, C, D тўрт нуқта берилган (15-расм). а) бири қолган иккитасининг орасида ётувчи учтадан нуқталарни айтинг; б) бири қолган учтаси орасида ётмаган нуқталарни айтинг.
13. 15-расмдаги a тўғри чизиқдаги нуқталардан тузилган: а) кесмаларни белгилаб ёзинг; б) қанча кесма туздингиз? в) B нуқта қайси кесмада ётади? г) D нуқта AB кесмада ётадими?
14. Бир тўғри чизиқда ётмаган M, N, P нуқталари берилган. Уларнинг ҳар бир иккитасидан ўтувчи қанча: а) кесма; б) тўғри чизиқ чизиш мумкин? Белгилаб ёзинг. Ҳар қандай икки тўғри чизиқ кесишган нуқталарни кўрсатинг. M нуқта NP кесмада ётадими?
15. A нуқта a тўғри чизиқни AB ва AC ярим тўғри чизиқларга ажратади (16-расм). а) Ярим тўғри чизиқлардан бирида ётган икки нуқтани кўрсатинг. б) ярим тўғри чизиқларнинг ҳар бирида ётган иккитадан нуқтани белгилаб кўрсатинг.
16. a ва b тўғри чизиқлари M нуқтада кесишади. Нечта ярим тўғри чизиқлар ҳосил бўлди? Уларни белгилаб ёзинг.
17. 16-расмда a тўғри чизиқнинг C ва D нуқталари орқали аниқланувчи ярим тўғри чизиқларни топинг. Нечта ярим тўғри чизиқ ҳосил бўлди?

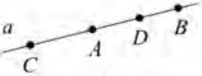
14-расм

15-расм

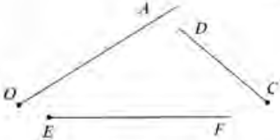
18. 17- масаладаги тўлдирувчи нурларни кўрсатинг.

19. 17-расмдаги OA, CD, EF нурларнинг ичидан бир-бири билан кесишмайдиган ва кесишадиган нурларни аниқланг. Кесилиш нуқтасини ясанг.

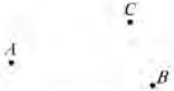
20. 16-расмда: а) Боши берилган нуқталарда ётган нечта нур бор? б) D нуқтасининг бир томонида қайси нуқталар жойлашган? Турли томонларида-чи? в) D нуқта қайси нуқталар орасида (бир томонида) ётади?



16-расм



17-расм



18-расм

21. Бир тўғри чизиқда ётмаган A, B, C нуқталари берилган (18-расм). Уларнинг ҳар бир жуфти орқали тўғри чизиқ ўтказинг. а) Нечта тўғри чизиқ чизилди? Уларни белгиланг; б) Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини аниқланг. Улар қайси тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари бўлади? в) Боши A, B, C нуқталари бўлган нурларни айтинг. Қўшимча белгилашлар орқали нурларни ёзинг. Нечта нур олинди?

Энди текисликда ётган тўғри чизиққа нисбатан шу текислик нуқталарининг қандай жойланишини аниқловчи тушунчаларни қараймиз.

α текислиги ва шу текисликда ётган a тўғри чизиғи берилсин (19-расм). a тўғри чизиғи берилган текисликни икки қисмга ажратади. Уларнинг ҳар бирини ярим текислик деб айтамиз. Ярим текисликларнинг бирини α_1, иккинчиси α_2 орқали белгилаймиз. У ҳолда α_1 ва α_2 текисликлари биргаликда α текислигини ташкил қилади. a тўғри чизиғи бўлувчи тўғри чизиқ деб ҳисобланади.

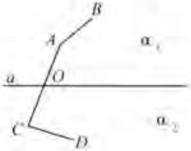
Геометрияда аҳамиятга эга бўлган қуйидаги хоссага кўнгил бурайлик. A, B нуқталари фақат битта ярим текисликда ётади, уларни туташтирувчи AB кесма a тўғри чизиғи билан кесишмайди. C, D нуқталари ва CD кесма ҳақида ҳам худди шуни айтиш мумкин. A ва C нуқталари турли (α_1 ва α_2) ярим текисликларда ётади. Уларни туташтирувчи AC кесма a тўғри чизиқ билан O нуқтада кесишади.

Юқоридаги тушунча асосида тўғри чизиққа нисбатан текислик нуқталарининг ўзаро жойланишини характерловчи аксиомани (асосий хосссани) ифодалаш мумкин. У II группа аксиомаларининг учинчиси бўлади.

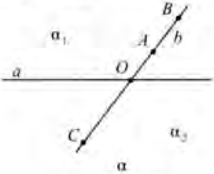
II_3. Текисликда ётган тўғри чизиқ уни иккита ярим текисликка бўлади.

Бу аксиома асосида қуйидаги хулосани таъкидлаб ўтиш мумкин. Текисликни бўлувчи a тўғри чизиқ итиёрий b тўғри чизиқ билан O нуқтада кесишсин (20-расм). У ҳолда b тўғри чизиқ икки нурга бўлинади. **Бу нурлар турли ярим текисликларда ётади.** OA ва OC нурлари b тўғри чизиқда ётган тўлдирувчи нурлар бўлсин. Агар OA нурда ихтиёрий B нуқтани олсак, у ҳолда O нуқта A ва B нуқталар орасида ётмайди, чунки O нуқта OA нурнинг боши. Демак, AB кесма a тўғри чизиқ билан кесишмайди. Шунинг учун OA нурда ётган ихтиёрий A ва B нуқталар ярим текисликнинг фақат биттасида ётади. У ҳолда OA нур α_1 ярим текисликда ётади.

OA ва OC нурлар тўлдирувчи нурлар бўлганлиги сабабли O нуқта A ва C нуқта орасида ётади. Демак, C нуқта α_2 ярим текислигида ётади. У ҳолда OC нурнинг барча нуқталари α_2 текислигида ётишини юқоридаги каби кўрсатиш мумкин. Натижада OC нур α_2 ярим текислигида ётади.



19-расм



20-расм

Шундай қилиб, b тўғри чизиқнинг OA, OC тўлдирувчи нурлари α текисликдаги a тўғри чизиқ орқали бўлинган турли ярим текисликларда ётади.

22. A, B, C, D нуқталар α текисликда ётади (21-расм). Шу текисликда ётган a тўғри чизиқ уни α_1 ва α_2 ярим текисликларга ажратади. Берилган нуқталарнинг ичидан:

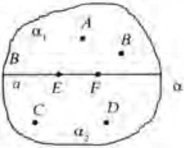
а) ярим текисликларнинг фақат биттасида ётганларини; б) ҳар бир ярим текисликларда ётганларини кўрсатинг; в) *AB,AC,AD, CD,CB* кесмаларнинг *a* тўғри чизиқ билан кесишишини ёки кесишмаслигини аниқланг.

23. 22-масалада Е нуқта *a* тўғри чизиқда ётса, *EA,EB,EC,ED* нурларнинг қайсилари:

а) битта ярим текисликда; б) турли ярим текисликларда ётишини аниқланг. Изоҳлаб беринг. Нурларни чизиб кўрсатинг.

24. *AE* тўғри чизиқдаги Е нуқта шу тўғри чизиқдаги *A* ва *C* нуқталар орасида ётмайди. *B* нуқта эса *AE* тўғри чизиқда ётмайди. *A* ва *E* нуқталар *BC* тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётадими ёки турли ярим текисликларда ётадими?

25. 21-расмда берилган: а) *BD* нур ва *a* тўғри чизиқ кесишадими? б) *CD* нур билан *a* тўғри чизиқ-чи? Тушунтириб беринг.



21-расм

26. Бир тўғри чизиқда ётмаган *A,B,C* нуқталар орқали *AB,BC* ва *AC* тўғри чизиқларини чизинг. Бу тўғри чизиқлар орқали текислик нечта бўлакка бўлинади?

2-§. ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАР

2.1. ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАР ҲАҚИДА УШУНЧА

Оддий геометрик фигуралар сизларга таниш. Масалан, учбурчак, квадрат ва бошқалар. *ABC* учбурчакни қарасак, унинг учлари *A,B,C* нуқталардан иборат, унинг *AB,DC,CA* томонлари кесмалар бўлиб ҳисобланади, улар ҳам нуқталардан иборат. Умуман, геометрик фигураларни нуқталар тўплами сифатида қараш мумкин.

Таъриф: Нуқталарнинг ҳар қандай бўш бўлмаган тўплами геометрик фигура деб айтилади.

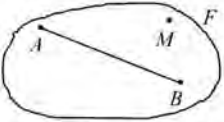
Масалан, тўғри чизиқ, нур, кесма, бурчак, тўртбурчак ва бошқалар геометрик фигуралар бўлиб ҳисобланади. Чунки бу фигураларнинг ҳар бири нуқталар тўпламидан иборат. Тўплам бир элементдан иборат бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун нуқтани ҳам геометрик **фигура** деб ҳисоблаш мумкин.

Демак, умумий ҳолда ёпиқ чизиқ билан чегараланган текисликнинг бўлагини **фигура** деб аташ мумкин (22-расм). Геометрик фигурани умумий ҳолда Fорқали белгилайлик.

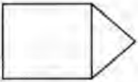
Агар M нуқта F фигурада ётса, уни қисқача $M \in F$ деб ёзамиз. Фигуралар икки хил бўлади: қавариқ ҳамда қавариқ эмас.

Агар Fфигуранинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи кесма тўлиқ шу фигурада ётса, у ҳолда бу фигура **қавариқ** деб аталади, агарда кесма тўлиқ ётмаса, у ҳолда фигура **қавариқ эмас** деб аталади. Қавариқ ва қавариқ эмас фигураларга ўзингиз мисоллар келтириб, чизмада кўрсатинг.

Агар F_1 ва F_2фигуралари қандайдир бир Nумумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу икки фигура N нуқтада кесишади. Фигураларнинг кесишишига нисбатан Nнуқталарнинг тўплами ҳар қандай фигура бўлиши мумкин. Бу саволларга кейинроқ тўхталиб ўтамиз.



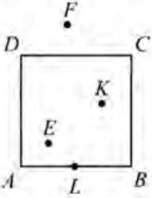
22-расм



23-расм

МАШҚЛАР

1. Сизларга таниш бўлган геометрик фигураларни айтинг.
2. Геометрик фигурани таърифлашда қандай асосий тушунча қўлланилди?
3. Оддий геометрик фигуралар: учбурчак, квадрат, куб, шар (улар ҳақида кейин тўлиқ тўхталиб ўтамиз) маълум. Уларнинг қайсиниси: а) текисликдаги; б) фазодаги фигуралар бўлади?
4. 23-расмдаги фигура қандай икки фигуранинг бирикишини кўрсатади?
5. Тўғри чизиқ, нур геометрик фигура бўла оладими?
6. Текисликни геометрик фигура деб аташ мумкинми?
7. Доира кўринишидаги фигураларни айтинг.



24-расм

8. Шар кўринишидаги фигураларни айтинг.
9. $ABCD$ квадрат берилган (24-расм). E, F, K, L нуқталарининг қайсилари: а) берилган квадратда; б) квадратнинг томонида ётади?
10. Устма-уст тушмаган икки тўғри чизиқ кесишса, қандай фигура ҳосил бўлади?
11. a тўғри чизиқ ва унда ётган АВ нур берилган. Уларнинг кесишмаси қандай фигура бўлади?

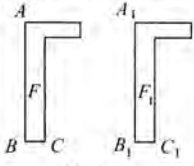
2.2. ФИГУРАЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ

Геометрияда фигураларнинг тенглигини ҳам қараб кўришга тўғри келади.

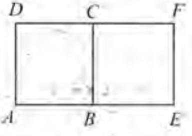
Агар икки фигурани мос нуқталари устма-уст тушадиган қилиб қўйиш мумкин бўлса, у ҳолда улар **тенг** деб аталади.

F ва F_1 фигураларнинг тенглигини $F=F_1$ кўринишда ёзилади. Баъзан, «тенг» деган сўзнинг ўрнига **конгруэнт**[1] деган термин қўлланилади. F фигура F_1 фигурага конгруэнт эканлиги $F=F_1$ кўринишида ёзилади.

Шундай қилиб, икки фигуранинг тенглигини аниқлашда уларнинг бирини иккинчи билан устма-уст қўйишга тўғри келади. Устма-уст қўйишда фигураларнинг тўғри келувчи, характерли нуқталарини ва элементларини танлаб олиш зарур. Масалан, $ABCD$ қавариқ тўртбурчакнинг $A'B'C'D'$ қавариқ тўртбурчакка тенг эканлигини кўрсатиш учун $ABCD$ тўртбурчак устига $A'B'C'D'$ тўртбурчакнинг учлари мос тушадиган қилиб устма-уст қўйиш керак. Агар A учи A' ва яна бошқа учлари билан, AB томони $A'B'$ томони билан ва яна бошқа томонлари билан мос келса, у ҳолда берилган икки тўртбурчак тенг бўлади.



25-расм



26-расм

---

[1] Конгруэнт - бу лотинча (congruens) «конруэнс» сўзидан олинган бўлиб, мос келувчи, бир хил ўлчамли деган маънони билдиради.

12. Қоғоздан кесилган ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг мос томонлари бир хил бўлса, уларнинг тенглигини аниқлаш учун қандай қилиб устма-уст қўйиш мумкин?

13.$ABCD$ квадратнинг $A_1B_1C_1D_1$ квадрат билан устма-уст қўйганда A учи A_1 учига, B учи B_1 учига, C учи C_1 учига мос келса, бу квадратларни тенг деб айтиш мумкинми? Нима учун?

14.25-расмда бир-бирига тенг бўлган F ва F_1 фигуралар берилган. Қандай йўл билан уларни кўчириб, устма-уст келтириш мумкин?

15.Агар берилган $ABCD$ квадратни AC тўғри чизиқ бўйича кессак, бир-бирига тенг бўлган икки учбурчак ҳосил бўлади. Уларнинг тенг учбурчаклар эканлигига қандай қилиб ишонч ҳосил қилиш мумкин?

16. Бўйи 3см, эни 1,5 см бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчакни (26-расм) AB томони бўйлаб 3 смга силжитганда $BEFC$ тўғри тўртбурчак ҳосил бўлди. Бу тўғри тўртбурчаклар тенг бўладими? Нима учун? Бу тўғри тўртбурчакларни яна қандай йўл билан бир-бирига мос келгудай қилиб, устма-уст қўйиш мумкин?

2.3. АЙЛАНА

Айлана ёпиқ эгри чизиқларнинг энг соддаси бўлиб ҳисобланади: **текисликда берилган нуқтадан бир хил узоқликда ётган нуқталар тўплами айлана деб аталади.** Берилган нуқта (O) айлана маркази деб аталади. Уни чизиш учун алоҳида асбоб – **циркуль**[1] қўлланилади. 27-расмда O маркази бўйича айлана чизилган. A, B, C нуқталари ўша чизилган айланада ётади. У ҳолда $OA=OB=OC$ бўлиши тушунарли.

Айлана марказидан унинг ихтиёрий нуқтасигача бўлган оралиқни (OA,OB) айлананинг **радиуси**[2] деб атаймиз. У r (ёки R) ҳарфи билан белгиланиб, «эр» деб ўқилади.У ҳолда $OA=r$ бўлиши тушунарли. Маркази O, радиуси rга тенг бўлган айлана $\omega(O,r)$ деб белгиланади (ω - «омега» деб ўқилади, грек алфавити). $\omega(O,r)$ айланасида ётган ихтиёрий B ва C нуқталарни олайлик. Бу нуқталар айланани икки бўлакка ажратади. Ҳар бир бўлак **айлананинг ёйи** ёки содда қилиб **ёй** деб аталади.

---

[1] Лотинча circulus - доира, айлана деган сўздан олинган.

[2] Лотинча сўз бўлиб,ғилдиракнинг синичи, деган маънони беради.

Демак, B ва C нуқталари берилган айланани BQC ва CLB бўлакларга (ёйларга) ажратади. Бунда Q нуқта B ва C нуқталари орасида ётувчи айлананинг ихтиёрий нуқтаси, L нуқта ҳам айланинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, ўз навбатида C ва B нуқталар орасида ётади. Айлана ёйлари мос ҳолда $\overset{\smile}{BQC}$ ва $\overset{\smile}{CLB}$ орқали ёки уларни ажратувчи нуқталар орқали $\overset{\smile}{BC}$ ёки $\overset{\smile}{CB}$ кўринишида ёзилади (ҳарфлар устига «◡», яъни ёй белгиси ёзиб қўйилади).

M ва N нуқталар айланада ётмайди. M нуқта унинг ичида, N нуқта айлана ташқарисида ётади, деб ҳисобланади. Чунки, айлана таърифига кўра, $OM<r$ ва $ON>r$ бўлади. Демак, айлана марказидан унинг ичида (ташқарисида) ётган нуқтагача бўлган масофа радиусдан кичик (катта) бўлади.

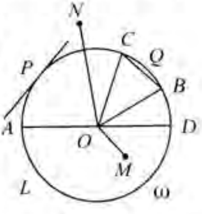
Агар айлананинг ихтиёрий икки нуқтасини (B ва C) туташтирсак, ҳосил бўлган кесма (BC) **айлананинг ватари**[1] деб аталади.

Айлана ватарининг учлари орқали аниқланган $\overset{\smile}{BC}$ ёй шу ватарга мос келувчи ёки унга тортилиб турувчи ёй деб аталади (27-расм).

Айлана маркази орқали ўтувчи ватар унинг **диаметри** деб аталади. Демак, 27-расмда AD диаметр бўлади. эканлиги тушунарли. Айлана маркази диаметр ўртасида бўлади.

Натижада диаметрга тўғри келувчи ёйни ярим айлана деб атаймиз.

Радиуслари тенг бўлган икки айлана тенг айланалардир. Чунки уларнинг марказларини мос келтириб, устма-уст қўйилса, улар бир-бирига мос келади.



27-расм

Агар тўғри чизиқ айлана билан иккита умумий нуқтага эга бўлса, бу тўғри чизиқ кесувчи тўғри чизиқ бўлади, битта умумий нуқтага эга бўлса, бу тўғри чизиқ **уринма** деб аталади (27-расмда ℓ тўғри чизиқ), Р нуқта уриниш нуқтаси бўлади.

Агар икки айлана иккита умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда улар бир-бири билан кесишади. Битта умумий нуқтага эга бўлишса, улар ичидан ёки ташқаридан уринувчи айланалар деб аталади. Бу мавзуга 19- § да тўлиқ тўхталиб ўтамиз.

---

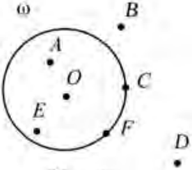
[1] Грекча «Chorde» сўзидан олинган бўлиб, «асбобнинг қили» деган маънони билдиради.

Айланани нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида ҳам таърифлаш мумкин.

Эслатма: нуқталарнинг геометрик ўрни деганда нуқталарнинг тўплами деб ҳам тушунамиз. Нуқталарнинг геометрик ўрни текисликда ёки фазода қаралиши мумкин. Биз қуйида текисликдаги нуқталарнинг геометрик ўрни ҳақида тўхталиб ўтамиз.

Нуқталарнинг геометрик ўрни қандайдир фигурани аниқлайди. Бироқ, бунда шундай шарт қўйилади: нуқталарнинг геометрик ўрнида (фигурада) ётган ҳар бир нуқта аниқ бир хоссага бўйсуниши керак. У ҳолда нуқталарнинг геометрик ўрнига қуйидагича таъриф бериш мумкин.

Таъриф. Нуқталарнинг геометрик ўрни деб, маълум бир хусусиятга эга бўлган нуқталардан ташкил топган фигурага айтилади. Масалан, текисликда берилган нуқтадан бир хил узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрни айлана бўлади. Бунда нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган хусусият бўлиб, бир хил масофада ётган, деган тушунча ҳисобланади.



28-расм

17. Айланани геометрик фигура деб аташ мумкинми? Нима учун?

18. Айланани таърифлашда қайси асосий тушунча қўлланилади?

19. Маркази О нуқта, радиуси 3,5 см бўлган айлана чизилган. Унинг диаметрини топинг.

20. Маркази *C* нуқта, диаметри AB=8 см бўлган айлана чизинг. Унинг радиусини топинг.

21. $\omega(O,R)$ айланасини чизинг (28-расм). Берилган A,B,C,D,E,F,O нуқталарининг қайсилари айлананинг: а) ичида; б) ташқарисида; в) айланада ётади; г) О нуқта айланада ётади, деб айтиш мумкинми? д) OC ва OF масофалар нимага тенг?

22. *A* нуқта орқали (28-расм) тўғри чизиқ ўтказилса, бу тўғри чизиқ айлана билан кесишадими? Нечта нуқта кесишади?

23. $\omega(O,R)$ айлананинг *O* марказини бошланиш нуқтаси қилиб нур чизсак, бу нур айланани нечта нуқтада кесиб ўтади?

24. Бир-бири билан кесишувчи $\omega(O,R)$ ва $\omega_1(O_1,R_1)$ айланалар чизинг. Улар нечта нуқтада кесишади? Бу икки айлана уч нуқтада кесилиши мумкинми?

25. Марказлари бир нуқтада ётган, радиуслари 2 см ва 3 см бўлган икки айлана чизинг. Уларнинг қайси бири катта бўлади?

26. Радиуслари бир хил бўлган $\omega(O, R)$ ва $\omega_1(O_1, R_1)$ айланалари берилган. Уларнинг марказларини қандай қилиб кўрсатиш мумкин?

2.4. ТЕОРЕМА ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Геометрияда таъриф ва аксиомалардан ташқари геометрик тушунчаларни ифодалаш учун **теорема**[1] деб аталувчи тасдиқлар ҳам кўп учрайди. Геометрик фигураларнинг хоссалари ва боғлиқликлари маълум бир кўринишда ифодаланади ва уларнинг тўғрилиги исботлар орқалигина тасдиқланади.

Таъриф: Исбот талаб қилувчи тасдиқ теорема деб аталади.

Теорема тўғрилигини кўрсатувчи муҳокамалар тизмаси унинг **исботи** деб аталади. Теоремани исбот қилишда унгача аниқ бўлган таърифлар, асосий хоссалар ва теоремалар қўлланилади.

Шундай қилиб, теорема тўғрилиги исбот ёрдами билан аниқланадиган математик тасдиқ сифатида қаралади. Теорема турли кўринишда ифодаланиши мумкин. Сиз арифметикадаги кўпгина теоремаларнинг ифодаланишини биласиз. Ҳар қандай теорема тушунтирувчи қисмдан, шарти ва хулоса деб аталувчи тасдиқлардан ташкил топганини осонгина сезиш мумкин. Масалан, сизларга арифметикадан таниш бўлган теоремани кўриб чиқайлик.

1-теорема. **Агар берилган натурал соннинг охирги иккита рақамидан тузилган сон тўртга бўлинса, у ҳолда берилган сон ўзи ҳам тўртга бўлинади.**

Бу теорема натурал сонлар тўпламида кўрилади - уни теоремани тушунтирувчи қисми деб ҳисоблаш мумкин. Бу тўпламда «соннинг охирги икки рақамидан тузилган сон тўртга бўлинса» - дегани - бу теореманинг шарти бўлиб ҳисобланади. «Соннинг ўзи ҳам тўртга бўлинади», – дегани теореманинг хулосасидир.

27. Қуйидаги тасдиқлардан қайси бири асосий хосса ёки теорема бўлишини тушунтириб беринг:

1) Ихтиёрий икки нуқта орқали фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. 2) Квадратнинг диагоналлари тенг. 3) Айлананинг марказидан чиқувчи нур уни бир нуқтада кесиб ўтади. 4) Бир тўғри чизиқда ётган уч нуқтанинг фақат биттаси қолган иккитасининг орасида ётади.

---

[1] Грекча сўз бўлиб, тўғрилиги исбот орқали тасдиқланувчи гап ёки тасдиқ.

28. Айлананинг маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ уни икки нуқтада кесиб ўтишини исботланг.

29. α текисликда берилган a тўғри чизиқ уни α_1 ва α_2 ярим текисликларга бўлади. $A \in \alpha_1, B \in \alpha_2$. AB тўғри чизиқ a тўғри чизиқни кесиб ўтади. Бу тасдиқ асосий хоссами ёки теоремами?

3-§. КЕСМАЛАРНИ ЎЛЧАШ

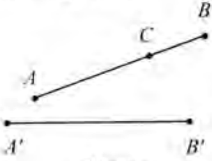
3.1. КЕСМАЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ

AB ва $A'B'$ кесмалар берилган (29-расм). Агар AB кесмани $A'B'$ кесма устига, A нуқта A' нуқтага мос келадиган қилиб, қўйганда, B нуқта B' нуқтага мос келса, у ҳолда AB ва $A'B'$ кесмалар тенг деб аталади ва $AB = A'B'$ кўринишида ёзилади.

Демак, икки кесманинг бирини иккинчисининг устига барча нуқталари мос келадиган қилиб қўйиш мумкин бўлса, у ҳолда улар тенг кесмалар деб аталади.

Бу тушунча AB кесмага тенг бўлган кесмани $A'B'$ нурга бошланиши A' бошланғич нуқтасидан бошлаб ўлчаб қўйиш (ясаш) мумкинлигини ифодалайди. Демак, кесма берилса, у ҳолда ихтиёрий нурда бир учи нурнинг бошида, иккинчи учи эса шу нурда ётган ва берилган кесмага тенг бўлган кесмани ҳар доим ясаш мумкин.

29-расмда C нуқта AB кесмада ётади. Бу ҳолда C нуқта AB кесмани икки кесмага ажратади: AC ва CB. У ҳолда AB кесма AC ва CB кесмалар йиғиндисига тенг деб аталади. Уни $AB=AC+CB$ кўринишида ёзилади. Бу ҳолда $CB=AB-AC$ деб ҳам ёзиш мумкин.



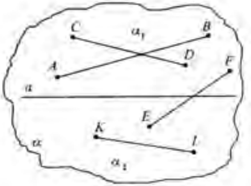
29-расм

30-расм

МАШҚЛАР

1. Квадратнинг томонлари тенг бўлишини қандай қилиб тушунтириш мумкин?

2. Бир тўғри чизиқда ётган M, N, D нуқталар (30-расм) берилган. а) Қайси нуқта қолган иккитасининг орасида ётади? б) MN ва ND кесмаларнинг йиғиндиси қандай кесмани ифодалайди? в) MN ва ND кесмаларининг айирмасини ифодаловчи кесмани кўрсатинг. г) MD ва ND кесмаларининг айирмасини ифодаловчи кесмани кўрсатинг.



31-расм

3. AB ва BC икки кесмани OM нурида O нуқтадан бошлаб циркуль билан ўлчаб қўйилганда иккала ҳолда ҳам OE кесма олинди. AB ва BC кесмалари ҳақида нима дейиш мумкин?

4. Икки кесма тенглигини яна қандай усул билан аниқлаш мумкин?

5. $ABCD$ квадрати берилган. AB, BC, CD, DA, AC, BD кесмалари ичидан: а) тенг; б) кесишувчи; в) кесишмайдиган кесмаларни аниқланг. Чизмада кўрсатинг.

6. α текислиги, унда ётган AB, CD, EF, ва KL кесмалари берилган (31-расм). Шу текисликда ётган a тўғри чизиқ уни α_1 ва α_2 ярим текисликларга ажратади. 1) Битта ярим текисликда ётган кесмаларни кўрсатинг; 2) қайси кесмалар a тўғри чизиқ билан кесишади (кесишмайди)? 3) ўзаро кесишувчи (кесишмайдиган) кесмаларни кўрсатинг; 4) циркулдан фойдаланиб, тенг кесмаларни аниқланг.

7. 31^a расмда сиз нечта кесмани кўрябсиз. Уларни айтинг.

31^a-расм

3.2.КЕСМАНИНГ УЗУНЛИГИ

Кесманинг узунлигини ўлчаш учун чизғичдан фойдаланиш мумкин. Масалан, AB кесманинг узунлигини ўлчаш учун чизғичнинг нол (0) сони ёзилган белгиси A нуқтага мос келадиган қилиб кесма бўйлаб чизғич қўйилади. Агар кесманинг B нуқтаси чизғичнинг 65 ммни ёки 6 см 5 ммни кўрсатувчи штрихи (бўлаги) тўғрисига мос келса, у ҳолда бу кесманинг узунлиги 65 ммга тенг бўлади, уни AB=65 мм деб ёзамиз. Бу ҳолда кесма узунлигининг ўлчов бирлиги қилиб 1мм олинди.

Демак, кесма узунлигини ўлчаш учун аввал узунлик ўлчови танлаб олинади. Узунлиги танлаб олинган ўлчов бирлигига тенг бўлган кесма **бирлик кесма** деб аталади.

Шундай қилиб, кесма узунлиги доим сон орқали ифодаланади ва шу сон ёнига ўлчов бирлиги ёзиб қўйилади. Масалан, $AB = 7$ см деб ёзилса, бу ерда 7 сони кесма узунлигини ифодаловчи сон бўлиб ҳисобланади. Бу ҳолда узунлиги 1 см га тенг бўлган бирлик кесма AB кесмага ёки AB нурга A нуқтадан бошлаб 7 марта кетма-кет қўйилганини кўрсатади. Демак, **кесма узунлигини ўлчаш деганда, бу кесмада нечта бирлик кесма бор эканлигини билдирувчи сонни топиш тушунилади.**

29-расмда *кўрсатилган* AB кесманинг узунлигини A ва B нуқталарнинг орасидаги масофа деб ҳам ҳисоблаш мумкин. Бунда AC ва CB кесмалар узунликларининг йиғиндиси AB кесма узунлигига тенг эканлигига осон ишонч ҳосил қилиш мумкин.

32-расм

Циркуль ёрдамида ҳам кесма узунлигини топиш мумкин. Бунинг учун узунлиги 1 см га тенг бўлган ёки ихтиёрий бирлик кесмани танлаб оламиз (32-расм). CD кесма узунлигини топиш учун C нуқтадан бошлаб 1 см кесмани циркуль ёрдами билан CD нурга кетма-кет қўямиз. D нуқтагача 6 марта ўлчаб қўйилса, у ҳолда CD кесма узунлиги 6 смга тенг бўлади: $CD = 6$ см.

Юқоридаги кесмалар тенглигидан фойдаланиб, кесмаларни ўлчашнинг асосий хоссаларини (аксиомаларни) ифодалаш мумкин. Улар III гуруҳни ташкил қилади.

III_1. Ҳар бир кесма нолдан катта бўлган маълум бир узунликка эга бўлади.

III_2. AB тўғри чизиқнинг C нуқтаси A ва B нуқталари орасида ётса, у ҳолда AB кесма узунлиги AC ва BC кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг.

7. CD бирлик кесма ва AB кесма берилган. Агар CD кесмани AB кесмага A нуқтадан бошлаб кетма-кет ўлчаб 4 марта қўйилса, у ҳолда AB кесма узунлиги нечага тенг бўлади ва у қандай ёзилади? $CD = 1$дм бўлса, AB кесма узунлигини ёзинг.
8. Узунлиги 12 смга тенг бўлган MN кесмасига циркуль ёрдами билан 2 см кесмани M нуқтадан бошлаб 4 марта ўлчаб қўйганда K нуқта ҳосил қилинди. MK ва KN кесмаларининг узунликларини топинг.
9. PQ кесма ва унда ётган E нуқта берилган. $PQ = 9$ см, $PE =$ 3 см 5 мм бўлса, EQ кесма узунлигини топинг. PE ва EQ кесмаларини таққосланг.

10. $\omega(0;3см)$ айланада M нуқта берилган. MB=2см, MC=3см бўлган ватарларни чизинг.

11. AB ва CD кесмалар берилган. Уларни OM нурда O нуқтадан бошлаб циркуль ёрдами билан ўлчаб қўйинг, уларнинг жойланишига қараб каттасини аниқланг ва изоҳлаб беринг.

12. AB кесмада А нуқтадан бошлаб узунлиги 12,5 мм бўлган кесма 8 марта қўйилди. АВ кесма узунлиги неча дециметрга тенг?

3.3.КЕСМАЛАР ЁРДАМИДА ЖАРИЛУВЧИАМАЛЛАР. СИНИҚ ЧИЗИҚ УЗУНЛИГИ

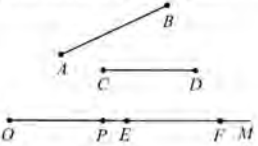
Агар C нуқта AB кесмада ётса $AB=AC+CB$ (3.1-§) бўлиши маълум. C нуқта AB кесмада ётмаса, у $AB<AC+CB$ бўлиши тушунарли. Бу охирги тенгсизлик тўғрилигига ундаги кесмалар узунликларини ўлчаш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин.

AB ва CD кесмалар берилсин (33-расм). Уларнинг йиғиндисини топиш мумкин. OM нурда O нуқтадан бошлаб, циркуль ёрдами билан $OE=AB$; $EF=CD$ кесмаларни кетма-кет ўлчаб қўямиз (33-расм). Натижада $OF=OE+EF=AB+CD$ ҳосил бўлади. Демак, OF кесма AB ва CD кесмалар йиғиндисини ифодалайди. Унинг тўғрилигига III, асосий хосса орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин.

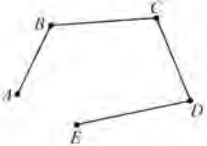
Шундай қилиб, **кесмалар йиғиндисининг узунлигини топиш учун уларнинг узунликлари йиғиндисини топиш керак.**

Агар a кесмани n марта катталаштириш, яъни a кесмани n га кўпайтириш талаб қилинса, у ҳолда юқоридаги кесмалар узунликлари йиғиндиси тушунчаси асосида a кесмани OM нурда O нуқтадан бошлаб n марта кетма-кет ўлчаб қўйиб, $OK=na$ кесмани ҳосил қиламиз.

Демак, **кесманинг сонга кўпайтмасининг узунлигини топиш учун шу кесма узунлигини берилган сонга кўпайтириш керак.** Ихтиёрий a кесма чизиб, $n=3$ учун чизмани мустақил бажариб кўринг.



33-расм

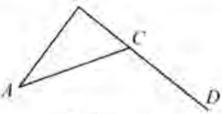


34-расм

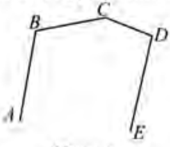
Энди AB ва CD кесмаларнинг айирмасини кўриб чиқайлик ($AB>CD$ бўлсин) OM нурда 0 нуқтадан бошлаб $OE=AB$ ва $OP=CD$ кесмаларни циркуль ёрдами билан ўлчаб қўйсак (33-расм), $OE=OP+PE$ ёки $PE=OE-OP=AB-CD$ (3.1) ҳосил бўлади. Демак, AB ва CD кесмаларнинг айирмасини топиш мумкин, у PE кесмага тенг, унинг узунлиги юқоридаги каби ҳисобланади.

$ABCDE$ синиқ чизиқ узунлигини (34-расм) топиш талаб қилинса, кесмалар йиғиндисини топиш қоидаси асосида OM нурда O нуқтадан бошлаб AB, BC, CD, DE кесмаларнинг ҳар бирига тенг бўлган кесмалар кетма-кет ўлчаб қўйилиб, $OL=AB+BC+CD+DE$ кесмасини ҳосил қиламиз. Бу кесма узунлиги берилган синиқ чизиқ узунлигини ифодалайди. Демак, синиқ чизиқнинг узунлигини топиш учун унинг ҳар бир кесмасининг узунликларини қўшиш керак.

13. Тўғри чизиқда A нуқтадан бошлаб $AB=4,6$ см; $BC=2,9$ см кесмалари кетма-кет ўлчаб қўйилган.
    а) AC кесма узунлигини топинг. б) A, B, C нуқталарининг қайсилари қолган иккитасининг орасида ётади (ётмайди)?
14. Узунлиги 4,5 м бўлган ғўланинг 2,7 м узунликдаги бўлаги кесиб олинди. Қолган қисмининг узунлигини топинг.
15. $AB=20$ м узунликдаги кесмага унинг A учидан $AC=5$м, B учидан эса $BD=7,9$ м кесмалар ўлчаб қўйилди. CD кесма узунлигини топинг.
16. 15-масалада $AB=6,8$ м, $AC=1,8$м, $BD=3,5$ м бўлса, у ҳолда CD кесма узунлигини топинг.
17. A, B, C уч нуқта бир тўғри чизиқда ётади: $AB=$ х, $AC=$ х-2. B нуқта A ва C нуқталарнинг орасида ётадими?
18. A, B, C уч нуқта бир тўғри чизиқда ётади. A нуқта B ва C нуқталар орасида ётади. $AB=$ х, $AC=$ х$+4,5$, $BC=6,7$ бўлса, AB ва AC кесмаларнинг узунликларини топинг.
19. C, D ва M нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. M нуқта C ва D нуқталар орасида ётади. $CM=a+1$, $DM=a+2$ $(a>0)$. CD кесманинг узунлиги 3дан катта бўлишини исботланг.
20. Агар a ва b берилган кесмаларнинг узунликлари ($a>b$) бўлса, циркуль ва чизғичдан фойдаланиб, узунлиги: а) $OA=2a+4b$; б) $OB=2a-b$ бўлган кесмани OM нурда ясанг.



35-расм



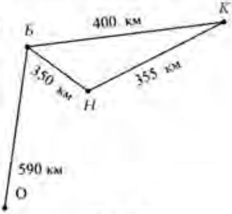
36-расм

21. *ABD* ва *ACD* синиқ чизиқларнинг (35-расм) қайси бири катта?

Кўрсатма: $AB+BC>AC$ шартидан фойдаланинг.

22. *ABCDE* синиқ чизиғи берилган (36-расм). а) Унинг ҳар бир кесмасини ўлчанг; б) синиқ чизиқнинг узунлигини топинг. в) Бу кесмаларни *OM* нурда *O* нуқтадан бошлаб кетма-кет ўлчаб қўйинг. г) Натижада ҳосил бўлган кесмани ўлчаб, б) ҳолдаги натижа билан таққосланг.

23. 37-расмда Ўш-Бишкек - Қоракўл-Норин маршрути бўйича автотуристик йўлнинг чизмаси ЎБҚН синиқ чизиқ орқали ифодаланган. Бунда Ў-Ўш, Б-Бишкек, Қ- Қоракўл, Н-Норин, ЎБ=590 км, БҚ=400км, ҚН=355км. Маршрут узунлигини топинг. Агар турист ЎБН маршрут (БН= 350 км) бўйича юрса, у ҳолда ЎБҚН масофа қанча километрга қисқаради?



37-расм

24. Агар: а) $AB=4{,}6$ см; $BC=7{,}4$ см; $AC=10$ см; б) $AB=6$ см; $BC=8{,}5$ см; АС=8,5 см; в) АВ=6,5 см; $BC = 25$ см, $AC=40$ см бўлса, А,В,С нуқталари бир тўғри чизиқда ётадими?

25. Оралиқлари ED=4,5 см, DF=3,2 см, EF=8 см га тенг бўладиган қилиб, *D,E*,F нуқталарни белгилаб олиш мумкинми?

26. *a* ва *b* тўғри чизиқлар А нуқтада кесишади. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бирига *A* дан бошлаб узунлиги m га тенг бўлган кесмани ўлчаб қўйилди. Ўлчаб қўйилган ҳар бир кесма учлари бўлиб ҳисобланган ҳар бир икки нуқта орқали тўғри чизиқлар ўтказилган. Нечта тўғри чизиқ ҳосил бўлди?

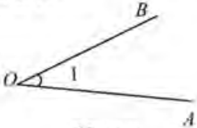
4-§. БУРЧАК. БУРЧАКНИНГ ТУРЛАРИ

4.1. БУРЧАК ҲАҚИДА ТУШУНЧА

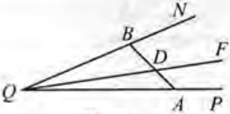
Нур ва текисликнинг тўғри чизиқ орқали бўлакларга бўлиниши ҳақидаги тушунчадан фойдаланиб, бурчак ҳақидаги тушунчани таърифлаш мумкин.

Таъриф: Бир нуқтадан чиқувчи икки нур билан чегараланган текисликнинг қисмига бурчак деб аталади.

О нуқтадан чиқувчи *ОА* ва *ОВ* нурлардан тузилган (38-расм) бурчакни *АОВ* бурчак деб атаймиз. Бурчак сўзини қулайлик учун «∠» белгиси билан белгилаймиз. Демак, *AOB* бурчак қисқача $\angle AOB$ кўринишида ёзилади. Бунда *OA*,*OB* нурлар **бурчакнинг томонлари**, *O* нуқта эса **бурчакнинг учи** дейилади. Демак,бурчакни учта ҳарф билан белгилаб ёзилганда, ўртасидаги ҳарф бурчакнинг учини билдиради. Бурчакни унинг учидаги бир ҳарф ёки рақам билан ҳам белгилаш мумкин: $\angle 0$ ёки $\angle 1$.



38-расм



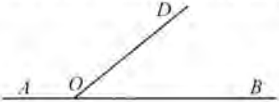
39-расм

PQN бурчак берилган бўлсин (39-расм). *QF* нур учлари учбурчакнинг *QP* ва *QN* томонларида ётган *AB* кесмани *D* нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда *QF* нур *QP* ва *QN* нурлари орасида ётади, яъни $\angle PQN$ нинг орасида ётади? деб ҳисобланади. Бу ҳолда *PQF* ва *FQN* бурчаклар ёнма-ён жойлашади, *QF* нур бурчаклар учун умумий томон бўлиб ҳисобланади. Шунинг учун **улар ёндош бурчаклар** деб аталади.

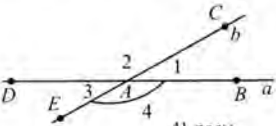
Демак, бир томони умумий бўлган икки бурчак **ёндош бурчаклар** деб аталади.

AB тўғри чизиқ берилган (40-расм). Бу тўғри чизиқдан *O* нуқта белгиласак, *OB* ва *OA* тўлдирувчи нурлар ҳосил бўлади. Томонлари бир тўғри чизиқни ташкил қилувчи *BOA* бурчак **ёйиқ бурчак** деб аталади. **Демак,** ёйиқ бурчакнинг томонлари бир тўғри чизиқда ётади.

Ёйиқ бурчакнинг учидан чиқиб, унинг томонлари билан устма-уст тушмаган ҳар қандай нур ёйиқ бурчакнинг ичида ётади, деб ҳисобланади. 40-расмда *OD* нур *BOA* ёйиқ бурчакнинг ичида ётади. Бу ҳолда *BOD* ва *DOA* бурчаклар қўшни бурчаклар деб аталади. Демак, бир томони умумий бўлиб, қолган икки томони бир тўғри чизиқни ташкил қилувчи *умумий учга эга* бўлган икки бурчак **қўшни бурчаклар** деб аталади.



40-расм



41-расм

A нуқтада кесишувчи a ва b тўғри чизиқлар берилган (41-расм). Бу ҳолда a тўғри чизиқда AB, AD нурларни, b тўғри чизиқда эса AC, AE нурларни белгилаш мумкин. AB,AC нурлар $\angle 1$ни, AC, AД нурлар $\angle 2$ни, AД,AE нурлар $\angle 3$ни ва AE, AD нурлар $\angle 4$ни ифодалайди.

Демак, икки тўғри бурчак кесишганда тўртта бурчак ҳосил бўлади. Улар берилган икки тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар бўлиб ҳисобланади. Бу ҳолда нурлар орасидаги бурчакларни бошқача ҳам ифодалаш мумкин. Биз бунга тўхталганимиз йўқ. $\angle 1$ ва $\angle 3$ни ёки $\angle 2$ ва $\angle 4$ни вертикал (лотинча сўз бўлиб «умумий учга эга» деган маънони билдиради) бурчаклар деб аталади. Демак, бир бурчакнинг томонлари иккинчи бурчакнинг томонларини тўлдирувчи нурлари бўлса, у ҳолда бундай бурчаклар **вертикал бурчаклар** деб аталади. AB ва AD, AC ва AE нурлари тўлдирувчи нурлар эканлиги тушунарли.

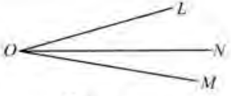
41-расм AB билан AC кесмалар AB ва AC нурларда ётувчи кесмалар сифатида қаралса, у ҳолда $\angle 1$ ни AB,AC кесмалар орасидаги бурчак деб атаймиз ва уни $\angle BAC$ деб белгилаймиз.

МАШҚЛАР

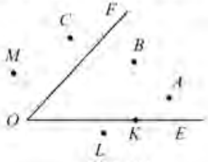
1. OA,OB нурларни чизинг. Улар орқали ҳосил бўлган бурчакни белгилаб ёзинг. Бурчакнинг учини, унинг томонларини кўрсатинг. Бу бурчакни яна қандай белгилаб ёзиш мумкин?

2. OM,ON,OL нурлар берилган (42-рам). Нечта бурчак ҳосил бўлди? Ҳар бир бурчакни белгилаб кўрсатинг. Ёндош бурчакларни белгилаб ёзинг.

3. EOF бурчаги ва нуқталар берилган (43-расм). Шу бурчакнинг: а) ичида; б) ташқарисида; в) томонларида ётган нуқталарни айтинг.

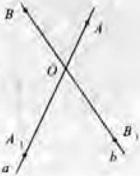


42-расм



43-расм

4. 3-масалада берилган ҳар бир икки нуқтани туташтириб A,B,BC,CM,DK, AL кесмаларни чизинг. EOF бурчагининг: а) ичида ётган; б) ташқарисида ётган; в) томонларини кесиб ўтган кесмаларни айтинг, изоҳлаб беринг.



44-расм

5. a тўғри чизиқда A, O, B нуқталарни белгиланг. O нуқта A ва B нуқталарининг орасида ётсин. OA, OB нурлари қандай бурчакни ҳосил қилади? Уни белгилаб ёзинг.
6. CO нур берилган. У билан ёйиқ бурчак ҳосил қилувчи OD нурни чизинг.
7. AOB ёйиқ бурчак берилган. OC нур орқали ҳосил бўлган AOC ва СОВ бурчаклар қандай бурчак ҳисобланади? Масала нечта ечимга эга?
8. a ва b тўғри чизиқлар O нуқтада кесишади (44-расм): а) нечта бурчак ҳосил бўлди? б) ҳар бир бурчакни белгилаб ёзинг; в) ёйиқ бурчакларни айтинг.

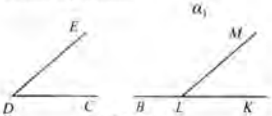
4.2. ТЕНГ БУРЧАКЛАР. БУРЧАК БИССЕКТРИСАСИ

Энди бурчакларнинг тенглигини кўриб чиқамиз.

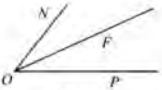
Таъриф: Агар икки бурчакни устма-уст қўйганда, тегишли томонлари ва учлари мос равишда устма-уст тушса, улар тенг бурчаклар деб аталади.

Масалан, 45-расмда CDE ва KLM бурчаклар тенг: $\angle CDE > \angle KLM$. Сабаби D учи L учига, DC томони LK томонига устма-уст қўйилганда DE томони LM томонига мос равишда устма-уст тушади.

LK нурни тўлдирувчи LB нур чизамиз. У ҳолда LM нур BK тўғри чизиқ орқали бўлинган ярим текисликларнинг бирида, масалан, α_1 ярим текислигида ётади. Бу тушунча CDE бурчакка тенг бўлган бурчакни тўғри чизиқ орқали бўлинган ярим текисликларнинг бирига учи шу тўғри чизиқда ётган нурдан бошлаб ўлчаб қўйиш (чизиш) мумкинлигини ифодалайди. Демак, бурчак берилса, у ҳолда учи ва бир томони текисликни бўлувчи тўғри чизиқда ётувчи, иккинчи томони берилган ярим текисликда ётган, берилган бурчакка тенг бўлган бурчакни ҳар доим ясаш мумкин.



45-расм



46-расм

Бурчакларнинг тенглигидан фойдаланиб қуйидаги натижаларни айтиш мумкин.

Агар *POF* ва *FON* ёндош бурчаклар (46-расм) тенг бўлса, у ҳолда *OF* нур *PON* бурчакни тенг иккига бўлади, деб айтиш мумкин.

Таъриф: Берилган бурчакнинг учидан чиқиб, уни тенг иккига бўлувчи нур шу бурчак биссектрисаси[1] деб аталади.

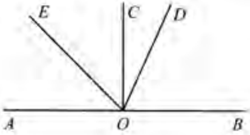
Бу ҳолда *OF* нур *PON* бурчакнинг биссектрисасидир.

BOA ёйиқ бурчак берилган (47-расм). Шу бурчакни тенг иккига бўлувчи, яъни $\angle BOC=\angle COA$ шартни қаноатлантирувчи *OC* нурни чизамиз.

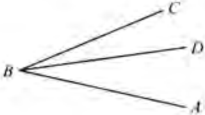
Таъриф: Ёйиқ бурчакнинг ярми тўғри бурчак деб аталади.

Бу ҳолда *BOC* ёйиқ бурчакни тенг иккига бўлувчи *OC* нур (47-расм) берилган бурчак ичида ётади ва шу бурчак учун биссектриса бўлиб ҳисобланади. Демак, $\angle BOC$ ва $\angle AOC$ тўғри бурчаклардир.

Агар *BD* нур *ABC* бурчак ичида ётса (48-расм). У ҳолда *ABC* бурчак *ABD* ва *DBC* бурчакларнинг йиғиндисига тенг деб ҳисобланади: $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$. Бунда *ABD* ва *DBC* бурчакларнинг ҳар бири *ABC* бурчакдан кичик бўлиши тушунарли. Юқоридаги тенгликдан $\angle DBC=\angle ABC - \angle ABD$ деб ёзишимиз мумкин.



47-расм



48-расм

Тўғри бурчакдан кичик бўлган бурчак **ўткир бурчак** деб аталади. 47-расмдаги *BOD* бурчак ўткир бурчак бўлади. Чунки $\angle BOD + \angle DOC = \angle BOC$, бунда *BOD* бурчак *BOC* тўғри бурчакдан кичик.

Тўғри бурчакдан катта, бироқ ёйиқ бурчакдан кичик бўлган бурчак **ўтмас бурчак** дейилади. $\angle BOC+\angle COE = \angle BOE$, бундан *BOC тўғри* бурчакдан *BOE бурчакнинг катталиги* келиб чиқади. *BOE* бурчакнинг ёйиқ бурчакдан кичиклиги тушунарли.

---

[1] Лотинча сўз бўлиб, «тенг иккига бўлиш» маъносини беради.

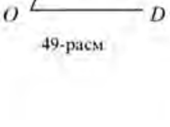
Шундай қилиб бурчакларнинг тўртта тури билан танишиб чиқдик: ўткир бурчак, тўғри бурчак, ўтмас бурчак ва ёйиқ бурчак.

9. Ўткир бурчак тўғри бурчакка нисбатан қандай бурчак бўлиб ҳисобланади?
10. Тўғри бурчакка тенг бўлган бурчак қандай бурчак бўлади?
11. Тўғри бурчак биссектрисаси уни қандай бурчакларга бўлади (ўткирми ёки ўтмас)?
12. Ёйиқ бурчакнинг биссектрисаси уни қандай бурчакларга бўлиши мумкин?
13. ABC ва CBE ёндош бурчаклар берилган. ABE бурчакни топинг. ABE ва ABC бурчакларни таққосланг.
14. 13-масалада ABC ва ABE бурчаклари берилган бўлса, $\angle CBE$ ни топинг. CBE ва ABE бурчакларини таққосланг.
15. Тўғри тўртбурчакнинг бурчаклари тенг эканлигини унинг бурчакларини устма-уст қўйиш орқали исботланг.
16. Чизмачилик учбурчагидан фойдаланиб, тўғри бурчак ясанг.

4.3. БУРЧАКНИНГ ЎЛЧОВ БИРЛИГИ. БУРЧАКЛАРНИ ЎЛЧАШ

Қуйида бурчакларни ўлчашга тўхталиб ўтамиз. Бу ҳақида 5-синф математика курсида қисқача танишгансиз.

Бурчак катталигини ўлчаш учун ўлчов бирлигини танлаб олиш зарур. Биз юқорида бурчакларни тўғри бурчакка нисбатан таққосладик. (4.2.) Шунинг учун ўлчовни ўша бурчакка нисбатан ҳисоблаш қулай бўлади. Тўғри бурчакни тенг 90 бўлакка бўлиб, унинг бир бўлагини, яъни тўғри бурчакнинг $\frac{1}{90}$ бўлагини 1 **градус**[1] деб атаймиз. Уни 1^0 деб белгилаш қабул қилинган. Бу бурчак катталигининг ўлчов бирлиги деб ҳисобланади.



49-расм

Демак, бу ўлчов бирлиги бўйича тўғри бурчак 90 градусга тенг. Уни 90^0 деб ёзамиз. Ёйиқ бурчак эса тўғри бурчакдан икки марта катта бўлганлиги сабабли, бу бурчак 180^0га

---

[1] Градус (gradus) - лотинча сўз бўлиб, «қадам», «босқич» деган маъно билдиради.

тенг. У ҳолда 47-расмдаги тўғри бурчакларни $\angle BOC = \angle COA = 90^0$, ёйиқ бурчакни эса $\angle BOA=180^0$ деб ёзамиз. Ўткир бурчакнинг ёки ўтмас бурчакнинг градус ўлчовини билиш учун уларни ўлчаш керак.

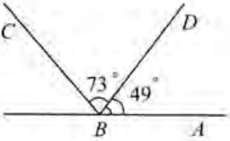
Бурчак катталигини ўлчаш учун алоҳида асбоб қўлланилади. Уни **транспортир** деб атаймиз.

Берилган *DOM* бурчакни (49-расм) транспортир орқали мустақил ўлчанг. Қанча градус бўлди?

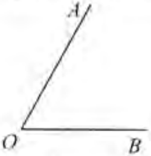
Ёйиқ бурчакдан кичик бўлган ҳар қандай бурчакни транспортир ёрдамида ўлчаш мумкин, бошқача айтганда градус орқали ифодалаш мумкин. Демак, ҳар қандай бурчак нолдан катта бўлган градус ўлчовга эга. Энди бурчакларни катталиклари бўйича таққослаш мумкин.

Агар икки бурчакнинг градус ўлчовлари тенг бўлса, у ҳолда бу бурчаклар тенг бўлади.

ABC бурчак *ABD* ва *DBC* бурчакларнинг йиғиндиси бўлса (50-расм), яъни $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC$ бўлса, *ABD* ва *DBC* бурчакларнинг градус ўлчовларининг йиғиндиси ABC бурчакнинг градус ўлчовига тенг. Масалан, $\angle ABC=49^0$; $\angle DBC=73^0$ бўлса, $\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=49^0+73^0=122^0$. Энди бурчакларни градус ўлчовлари бўйича таърифлаш мумкин.



50-расм



51-расм

Катталиги 90^0дан кичик, бироқ 0^0дан катта бўлган бурчак **ўткир бурчак** дейилади.

Катталиги 90^0дан катта, бироқ 180^0дан кичик бўлган бурчак **ўтмас бурчак** деб аталади.

Транспортир ёрдамида фақат бурчакнинг градус ўлчовигина ўлчанмасдан, балки градус ўлчови берилган бурчакни ясаш ҳам мумкин. Масалан, 51-расмда $\angle AOB=70^0$ бурчакни ясаш берилган. Уни изоҳлаб беринг.

Шундай қилиб, бурчакларнинг тенглиги, уларни ўлчаш асосида бурчакларни ўлчашнинг асосий хоссалари келиб чиқади. Улар III-гуруҳни ташкил қилади.

III_3. Ҳар қандай бурчак нолдан катта бўлган аниқ бир градус ўлчовга эга бўлади. Ёйиқ бурчак 180^0 тенг.

III$_4$. Агар *OC* нур *AOB* бурчак учидан чиқиб, унинг томонлари орасида ётса, у ҳолда *AOB* бурчак *AOC* ва *COB* бурчаклар йиғиндисига тенг.

Юқорида кесма узунлигини ўлчашни чизғич ёки циркуль ёрдами билан бирлик кесмани кетма-кет қўйиш орқали бажардик. Худди шундай, берилган узунликдаги кесмани нурга бошки нуқтадан бошлаб қўйишни кўриб чиқдик. Бурчак катталигини ўлчашда ҳам транспортир ёрдами билан бурчак бирлигини берилган нурдан бошлаб берилган ярим текисликда кетма-кет ўлчаб қўйиб градус ўлчовини топдик. Берилган бурчакка тенг бўлган бурчакни ясаш мумкинлигини кўриб чиқдик.

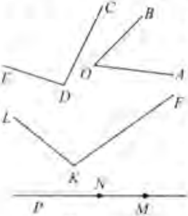
Бу тушунчалар асосида кесмаларни ва бурчакларни ўлчаб қўйишнинг асосий хоссаларини ифодалаш мумкин. У тўртинчи гуруҳдаги аксиомаларни ташкил қилади.

IV$_1$ Берилган нурга унинг бошланғич нуқтасидан бошлаб берилган *x* узунлигидаги кесмани фақат бир марта ўлчаб қўйиш мумкин.

IV$_2$ Градус ўлчови 180^{0}дан кичик бўлган бурчакни берилган ярим текисликда берилган нурдан бошлаб фақат бир марта қўйиш мумкин.

Бу аксиомалардан келиб чиқувчи хулоса ва уларнинг теоремаларни исботлашда қўлланилиши кейинги параграфларда кўрилади.

Демак, узунлиги аниқ бўлган кесмани нурга бошки нуқтадан бошлаб фақат бир марта ўлчаб қўйиш мумкин. IV$_2$ асосий хосса ҳам худди шундай текширилади. Транспортирдан фойдаланиб 30^0;45^0;60^0;90^0;135^0 бурчакларни ясанг.



52-расм

17. 52-расмда берилган бурчакларни транспортир ёрдамида ўлчанг: а) уларни белгилаб, мос қийматларини ёзинг; б)уларнинг қайсиниси ўткир, қайсиниси тўғри бурчак, қайсиниси ўтмас бурчак ва қайси бири ёйиқ бурчак?

18.*AOB* ёйиқ бурчак (53-расм) берилган. *AB* тўғри чизиқ орқали ифодаланувчи ярим текисликларнинг бирида $\angle AOC=90^0$ тўғри бурчакни ясанг. а) $\angle COB=90^0$ бўлишини исботланг; б) *OC* нур ётган ярим текисликда $\angle AOD$- ўткир, $\angle AOE$- ўтмас бурчак бўладиган қилиб *OD, OE* нурларни чизинг; в) *AOD, AOE* бурчакларни ўлчаб, натижаларни тўғри бурчак билан таққосланг. Қандай хулосалар айта оласиз?

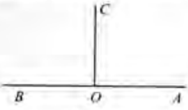
19. 1) 18^0,2) 92^0, 3) 109^0, 4) 90^0, 5) 180^0 бурчаклардан қайси бири ўткир, тўғри, ўтмас ва ёйиқ бурчак бўлади?

20. $\angle AOB=42^0$, $\angle BOC=28^0$ ёндош бурчаклар бўлса, AOC бурчакни топинг.

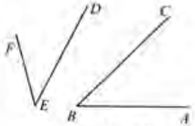
21. 20-масалада $\angle AOC=104^0$, $\angle AOB=80^0$ бўлса, $\angle BOC$ бурчакни топинг.

22. Қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180^0 бўлишини исботланг.

23. Қўшни бурчаклардан бири: 1) 45^0; 2) 120^0; 3) 18^0 бўлса, иккинчисини топинг.



53-расм



54-расм

4.4. БУРЧАКЛАР УСТИДА БАЖАРИЛАДИГАН АМАЛЛАР

Кесмалар устида бажарилувчи амаллар сингари бурчакларни ҳам қўшиш, айириш ва бурчакни сонга кўпайтириш мумкин.

ABC ва DEF бурчаклар (54-расм) берилсин. Уларнинг йиғиндисини топамиз. Бунинг учун a тўғри чизиқни олиб, OM нурни белгилаймиз. a тўғри чизиқ орқали бўлинадиган ярим текисликларнинг бирига OM нурдан бошлаб транспортир ёрдамида $\angle MOK=\angle ABC$ ва $\angle KOL=\angle DEF$ бурчакларни қўямиз (55-расм).

У ҳолда $\angle MOL=\angle MOK+\angle KOL=\angle ABC+\angle DEF$ бўлади. Демак, $\angle MOL$ берилган бурчакларнинг йиғиндисини ифодалайди. Унинг тўғрилигига III_4 асосий хосса орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шундай қилиб, бурчаклар йиғиндисининг катталигини топиш учун уларнинг катталиклари йиғиндисини топиш керак. Бурчаклар айирмасининг катталиги ҳам шунга ўхшаш усул билан аниқланади.

Агар $\angle 1$ берилиб, уни n марта орттириш ёки уни n га кўпайтириш талаб қилинса, буни бурчаклар йиғиндисини топишга таянган ҳолда бажарамиз.

a тўғри чизиқ орқали аниқланган ярим текисликларнинг бирида OM нурдан бошлаб 1 бурчакни n марта кетма-кет ўлчаб қўйиб, $\angle MON=n\cdot\angle 1$ бурчакни ҳосил қиламиз. Демак, MON

бурчакнинг катталигини топиш учун $\angle 1$ бурчакнинг градус ўлчовини n га кўпайтириш керак. Агар $\angle 1 = 15^0$, $n = 8$ бўлса, $\angle MON = 8 \cdot \angle 1$ бурчак катталигини мустақил топинг.

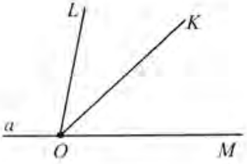
Теорема исботининг бажарилишини кўрсатиш мақсадида қуйидаги 2-теореманинг исботига тўлиқ тўхталиб ўтамиз.

2-теорема. **Вертикал бурчаклар тенг бўлади.**

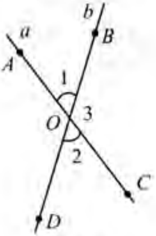
Берилди: 1 ва 2 вертикал бурчаклар (56-расм).

Исбот қилинсин[1]: $\angle 1 = \angle 2$ эканлиги.

Исбот: Вертикал бурчаклар иккита тўғри чизиқнинг кесишиши натижасида ҳосил бўлади, a ва b тўғри чизиқлар O нуқтада кесишсин. $\angle 1$ ва $\angle 2$ вертикал бурчаклар. COA - ёйиқ бурчак, у ҳолда III$_3$ аксиома асосида $\angle COA = 180^0$ бўлади. Бироқ $\angle 3 + \angle 1 = \angle COA$ ёки $\angle 3 + \angle 1 = 180^0; \angle 1 = 180^0 - \angle 3$ (1) деб ёза оламиз. Худди шунга ўхшаш b тўғри чизиққа нисбатан ҳам $\angle DOB = 180^0$, ёки $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ ёки $\angle 2 = 180^0 - \angle 3$ (2). (1) ва (2) тенгликларнинг ўнг томонлари тенг, у ҳолда $\angle 1 = \angle 2$ бўлади. Теорема исбот қилинди.



55-расм



56-расм

25. Қўшни бурчаклар йиғиндисини топинг.
26. $\angle AOB = 70^0$ бурчакнинг OC биссектрисаси ўтказилган AOC ва COB бурчакларни топинг, уларни таққосланг. Улар қандай бурчаклар?
27. Қўшни бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу бурчаклар тўғри бурчак бўлишини исботланг.

---

[1] Бундан кейин теоремаларни исботлашда, матнни қисқача баён қилиш мақсадида «берилган», «исбот қилинсин» сўзларини ёзиб ўтирмаймиз.

28. Икки тўғри чизиқнинг кесишиши натижасида ҳосил бўлган бурчаклардан бири 50^0 бўлса, қолган бурчакларни топинг. Бу ерда қўшни бурчакларни ва ёйиқ бурчакни кўрсатинг.

29. Вертикал бурчакларнинг биссектрисалари бир тўғри чизиқни ташкил қилади. Шуни исботланг.

30. Қўшни бурчакларнинг биссектрисалари орасидаги бурчак 90^0га тенг эканлигини исботланг.

31. *AOB* бурчак берилган. Агар *AOB* бурчак: а) ёйиқ, б) ёйиқ эмас бўлса, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$ бўладиган қилиб, *OC* нурни ясанг. *OC* нур *OA* нурга ва уни тўлдирувчи нурга нисбатан қандай ярим текисликка тегишли бўлади? Шундай нурлардан нечта ясаш мумкин?

Кўрсатма: (1) тенглик *OC* нурни *OA* ва *OB* нурлар орасида ётгандагина бажарилади.

32. Амалларни бажариб, натижаларни чизмада кўрсатинг.

1) 30^0+45^0; 2) $18^0 17'+11^0 43'$; 3) 120^0-30^0; 4) $98^0-17^0 30'$;
5) $11^0 15' \cdot 4$; 6) $61^0 30' \cdot 2$

33. а) 2^0; 15^0; $1{,}5^0$; $8^0 17'$ бурчаклар берилган. Уларни минутлар орқали ифодалаб ёзинг. б) $240'$; $30'$; $360'$ бурчакларнинг ҳар бирини градус орқали ифодаланг.

34. 30^0; 45^0; 60^0; 15^0 бурчакларнинг ҳар бири: 1) тўғри бурчакнинг; б) ёйиқ бурчакнинг қандай қисмини ташкил қилади?

35. а) Тўғри бурчакнинг; б) ёйиқ бурчакнинг $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{6}$ қисми неча градусли бурчакни ташкил қилади?

36. Қўшни бурчакларнинг бири 48^0 бўлса, иккинчисини топинг.

37. Қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан : 1) 64^0га катта; 2) 56^0га кичик; 3) 3 марта катта; 4) 2 марта кичик бўлса, ўша бурчакларни топинг.

38. Икки тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган икки бурчакнинг; а) йиғиндиси 70^0; б) бири иккинчисидан 3 марта катта; в) бири иккинчисидан 35^0га кичик бўлса, номаълум бурчакларни топинг.

39. Агар: а) $\angle AOB=20^0$; $\angle BOC=50^0$ бўлса, *AOC* бурчакни топинг. *OB* нур қайси нурлар орасида, яъни қайси бурчакнинг ичида ётади? б) $\angle AOC=60^0$; $\angle BOC=35^0$ бўлса, AOB бурчакни топинг.

40. *AB* тўғри чизиғида *C* нуқта олинг, бу нуқтадан *ACD* бурчаги *BCD* бурчагидан 4 марта катта бўладиган қилиб *CD* нурни ясанг. Шу бурчакларни топинг.

41. Берилган бурчак билан *ABC* бурчакнинг йиғиндиси иккита тўғри бурчак ҳосил қиладиган бурчакни топинг.

Кўрсатма: *B* нуқтадан *BA* ёки *BC* нурни тўлдирувчи нур ясанг.

42. 47-расмда берилган бурчакларга нисбатан қуйидаги ёзувлар тўғри бўлиши учун юлдузчалар ўрнига >ёки< белгиларининг қайси бирини қўйиш мумкин:

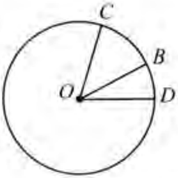
а) $\angle AOD * \angle AOC$; б) $\angle AOE * \angle AOB$ в) $\angle AOE * \angle AOC$

43. Ёндош бўлган AOB; BOC; COD ва DOE бурчаклар тартиб билан бири кейингисидан 10^0 катта бўлиб, OA ва OE нурлар бир тўғри чизиқни ҳосил қилади. Бу бурчакларни топинг ва уларни ясанг.

44. Берилган бурчакнинг ва унга қўшни бўлган икки бурчакнинг йиғиндиси $2\frac{3}{8}d$ га (бунда $d=90^0$) тенг. Берилган бурчакни топинг.

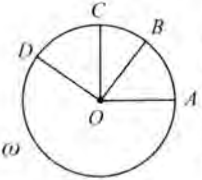
45. Транспортир ва чизғичдан фойдаланиб, берилган:
а) a томони бўйича квадратни; б) a,b томонлари бўйича тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

4.5. МАРКАЗИЙ БУРЧАКЛАР



$\varpi(O,r)$ айлана берилган (57- расм). Айлананинг икки радиуси орасидаги бурчак **марказий бурчак** деб аталади. OB ва OC радиуслари орасидаги BOC бурчак марказий бурчак бўлиб ҳисобланади.

Марказий бурчакнинг томонлари айланани икки ёйга бўлади. Уларнинг бири марказий бурчак ичида ётади ($\breve{BC}$), шунинг учун бу ёй берилган марказий бурчакка мос келувчи ёй деб аталади.



58-расм

Демак, $\breve{BC}$ ёй $\angle BOC$ марказий бурчакка мос келувчи ёй деб аталади. Аксинча, $\breve{BC}$ ёйга $\angle BOC$ марказий бурчак мос келади. Марказий бурчак градус ўлчовга эга бўлганлиги сабабли унга мос келувчи ёй ҳам шу градус ўлчовга тенг деб ҳисобланади. Масалан, $\angle BOC = 48^0$ бўлса, унда $\breve{BC} = 48^0$ деб ёзамиз. Натижада $\angle BOC = \breve{BC}$ бўлади (фақат битта айланада). Демак, тўлиқ айлананинг бурчак ўлчови 360^0га тенг, чунки айлананинг тўлиқ марказий бурчаги 360^0та тенг.

Агар айланада OD радиусни ясасак, унда $\angle DOB + \angle DOC = \angle BOC$ бўлади. Натижада $\breve{DB} + \breve{DC} = \breve{BC}$ деб айта оламиз.

Демак, икки марказий бурчак йиғиндисига тенг бўлган марказий бурчакка тўғри келувчи ёй шу марказий бурчакларга мос келувчи ёйлар йиғиндисига тенг.

3-теорема: **Агар айланада берилган икки марказий бурчак тенг бўлса, унда уларга мос келувчи ёйлар ҳам тенг бўлади.**

Исбот: $\omega(O,r)$ айлана (58-расм) берилган. $\angle AOB$, $\angle COD$ марказий бурчаклар бўлсин. Унда уларга мос келувчи ёйлар ва $\breve{CD}$ бўлади. Теореманинг шарти бўйича $\angle AOB = \angle COD$ бўлганлиги сабабли, OA, OB нурларни мос равишда OC, OD нурларга мос тушадиган қилиб устма-уст қўйиш мумкин (4.2). Бунда A нуқта C нуқтага, B нуқта D нуқтага мос келади, чунки $OA=OC$; $OB=OD$ (битта айлана радиуслари). Шундай қилиб $\breve{AB}$, $\breve{CD}$ ёйларнинг ҳар бир нуқтаси O марказдан бир ҳил узоқликда жойлашган. Шунинг учун устма-уст қўйганда $\breve{AB}$ ёй $\breve{CD}$ ёйга мос келади, унда тенг фигураларнинг таърифига асосан $\breve{AB} = \breve{CD}$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

Натижа: Агар айланада икки ёй тенг бўлса, унда уларга мос келувчи марказий бурчаклар ҳам тенг бўлади.

46. $\omega(O,r)$ айланани чизинг. Айланада C ва D нуқталарни белгиланг. $\breve{CD}$ ёйга тўғри келувчи марказий бурчакни ясанг ва уни белгиланг.

47. Айлананинг а) ярмига; б) олтидан бир қисмига тенг келувчи марказий бурчак катталигини топинг.

48. Айлананинг марказий бурчаклари $\angle AOB=45^0$, $\angle BOC=60^0$ бўлса, уларга тўғри келувчи AB, BC ва AC ёйларининг бурчак катталикларини топинг.

49. Агар $\omega(O,r)$ айланада $\breve{AB} = \breve{CD}$ бўлса, унда уларга мос келувчи марказий бурчаклар тенг бўлишини исботланг.

50. Ярим айлана: а) 3; б) 4; в) 6; г) 18 та тенг бўлакларга бўлинган. Ҳар бир ёйнинг градус ўлчовини ва унга мос келувчи марказий бурчакнинг катталигини топинг.

I БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Асосий тушунчаларни айтинг.
2. Бир нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтади?
3. Икки нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтади?
4. I,I, асосий хоссаларни айтиб беринг.
5. Тўғри чизиқда қанча нуқта бор?
6. Икки тўғри чизиқ нечта нуқтада кесишиши мумкин? Кесишмай қолиши мумкинми?

7. II_1, II_2 асосий хоссаларни айтиб беринг.
8. Кесма таърифини ифодаланг.
9. Нурни қандай таърифлаш мумкин?
10. Боши бир нуқтада бўлган нечта нур чизиш мумкин?
11. Қандай икки нур тўлдирувчи нурлар бўлади?
12. II_3 асосий хоссани айтинг, тушунтириб беринг.
13. Бурчакка таъриф беринг. Қандай бурчак ёйиқ бурчак деб аталади?
14. Қўшни бурчакларга, вертикал бурчакларга таъриф беринг.
15. Геометрик фигурага таъриф беринг.
16. Қандай фигуралар тенг фигуралар деб аталади?
17. Нуқталарнинг геометрик ўрнига таъриф беринг.
18. Қандай кесмалар (бурчаклар) тенг бўлади?
19. Бурчак биссектрисасини таърифланг.
20. Тўғри, ўткир, ўтмас бурчакларга таъриф беринг.
21. III_1, III_2 асосий хоссаларни айтинг.
22. Бурчак бирлигини айтинг. Тўғри, ёйиқ бурчаклар нимага тенг?
23. III_3, III_4 асосий хоссаларни айтинг, тушунтириб беринг.
24. IV_1, IV_2 асосий хоссаларни айтинг.
25. Айланага таъриф беринг. Унинг радиуси, диаметри ва ёйини тушунтиринг.
26. Айлананинг марказий бурчагини, ватарини қандай ифодалаш мумкин?
27. Қандай икки айлана тенг бўлади?
28. Қандай тўғри чизиқ айланага уринма дейилади?
29. Теоремани қандай математик тасдиқ деб аташ мумкин?

1 БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. a тўғри чизиқ ва унда ётувчи A, B, C, D нуқталари худди шу тартибда кетма-кет берилган. Бу нуқталарнинг қайси бири: 1) A ва C; 2) B ва D; 3) A ва D нуқталари орасида ётади?

2. 1-масалада: 1) a тўғри чизиқда нечта кесма бор? 2) AD кесма қандай кесмалар йиғиндисига тенг? 3) BD кесма-чи?

3. 1-масаладаги a тўғри чизиқда: 1) Боши A, B, C, D нуқтада бўлган нечта нур бор? 2) Нечта тўлдирувчи нурлар бор?

4. Соат миллари 8дан 9гача неча марта тўғри бурчакни ва неча марта ёйиқ бурчакни ҳосил қилади?

5. OC нур AOB тўғри бурчакнинг ичида ётади? AOC бурчак COB бурчакдан 5 марта катта бўлса, бу бурчаклар катталикларини топинг.

6. Қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан 8 марта кичик бўлса, шу бурчаклар катталикларини топинг.

7. Қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан 40^0га кичик бўлса, бу бурчакларни топинг.

8. $\angle AOB=110^0$, $\angle AOC=160^0$. Агар OB ва OC нурлари OA нур ётган тўғри чизиқ орқали бўлинган ярим текисликларнинг: а) бирида; б) иккаласида ётса, BOC бурчакни топинг.

9. $AB=8$ см кесма берилган. $\omega_1(A,5см)$ ва $\omega_1(B,5см)$ айланалар C ва D нуқталарда кесишади. $AC+BC=AD+BD$ бўлишини исботланг.

10. Айланада катталиклари 60^0 ва 80^0 бўлган марказий бурчаклар берилган бўлсин. Уларга тўғри келувчи ёйларнинг йиғиндисини ва айирмасини, градус ўлчовларини топинг.

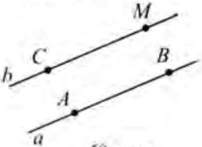
11. Айланада $\breve{BC}=20^0$ берилган бўлса, $\breve{BD}=7\cdot\breve{BC}$ ни ҳисобланг. Шу айлананинг BOD марказий бурчагини ҳисобланг.

II БОБ ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

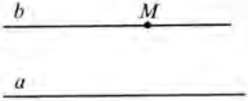
5-§. ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ АНИҚЛАНИШИ

Текисликда ётган икки тўғри чизиқ бир нуқтада кесишади ёки кесишмайди (1-§) . Текисликда ётган икки тўғри чизиқ кесишмаса, улар **параллел**[1] тўғри чизиқлар деб аталади.

59-расмда бир бири билан параллел бўлган a ва b тўғри чизиқлар берилган. Параллел сўзини қисқача « $\parallel$ » кўринишда белгилаймиз. Унда параллел тўғри чизиқлар $a \parallel b$ деб ёзилади. Параллел тўғри чизиқларда ётган кесмалар ҳам, нурлар ҳам параллел бўлади деб ҳисобланади. Уҳолда $a \parallel b$ тўғри чизиқларида ётган AB ва CM кесмалари ҳамда AB ва CM нурлари параллел бўлади: $AB \parallel CM$ ёки AB нур CM нурга параллел.



59-расм



60-расм

Текисликда M нуқта орқали ўтувчи чексиз кўп тўғри чизиқлар бўлади (1-§). Унда М нуқта орқали ўтувчи ва берилган a тўғри чизиққа параллел бўлган нечта тўғри чизиқ бор, деган савол келиб чиқади.

Икки қиррали чизғич ёрдамида ҳам параллел тўғри чизиқларни чизиш мумкин. M нуқта берилган бўлсин (60-расм). Чизғичнинг бир қиррасини M нуқта билан мос қилиб қўйиб, унинг иккинчи қирраси орқали a, b тўғри чизиқларни чизсак,

---

[1] Грекча «параллелос» деган сўздан олинган бўлиб, «ёнма-ён юрувчи» деган маънони билдиради.

унда $a \parallel b$ бўлади. Бунда b тўғри чизиқ M нуқта орқали ўтади. Демак, M нуқта орқали ўтувчи яна қандайдир a тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ бор ёки a тўғри чизиқнинг ташқарисида ётган M нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа параллел бўлган b тўғри чизиқ топилади.

Бу тушунчани умумий ҳолда асослашга ва юқоридаги саволга, қуйидаги асосий хосса (аксиома) жавоб беради. Бу, аксиомаларнинг V-группасини ташкил қилади.

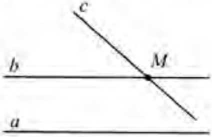
V. Текисликда берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали ўтувчи ва шу тўғри чизиққа параллел бўлган биргина тўғри чизиқ мавжуд.

Бу параллеллик аксиомаси деб аталади. Демак, M нуқта орқали (60-расм) берилган a тўғри чизиққа параллел бўлган фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

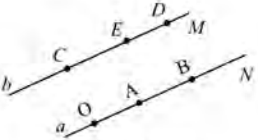
4-теорема. **Агар қандайдир бир тўғри чизиқ параллел бўлган икки тўғри чизиқнинг бирини кесиб ўтса, унда бу тўғри чизиқ иккинчисини ҳам кесиб ўтади.**

Исбот: $a \parallel b$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин (61-расм). c тўғри чизиқни b тўғри чизиқ M нуқтада кесиб ўтсин, c тўғри чизиқ a тўғри чизиқни ҳам кесиб ўтишини исботлаймиз.

Тескарисини фараз қилайлик, C тўғри чизиқ a тўғри чизиқни кесиб ўтмайди, деб ҳисоблайлик. Унда $c \parallel a$ бўлади. Натижада M нуқта орқали a тўғри чизиққа параллел бўлган икки тўғри чизиқ (b, c) ўтиб қолади. Бу V-аксиомага зид. Демак, c ва a тўғри чизиқлари кесишади. Теорема исбот қилинди.



61-расм



62-расм

МАШҚЛАР

1. l тўғри чизиқ ва ундан ташқарида ётган M нуқта берилган. M нуқта орқали ўтувчи: а) l тўғри чизиқни кесиб ўтувчи a, b тўғри чизиқларини; б) l тўғри чизиққа параллел бўлган c тўғри чизиқни чизинг.

2. Параллел тўғри чизиқларга турмушдан мисол келтиринг.

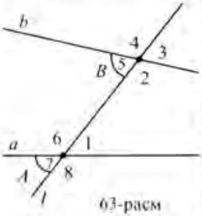
3. $a \parallel b$ тўғри чизиқлар берилган (62-расм). Бу тўғри чизиқларда

AB,CD, ED кесмаларини ва *ON, OF, FM* нурларини белгиланг. Параллел кесмаларни ва параллел нурларни айтинг. Улар нима учун параллел: яна қандай параллел кесмалар (нурлар) бор?

4. a, b, c тўғри чизиқларда $a \parallel c$, $b \parallel c$ бўлса, унда $a \parallel b$ бўлишини исботланг.
5. a тўғри чизиқ ва ундан ташқарида ётган A нуқта берилган. А нуқта орқали ўтувчи учта тўғри чизиқнинг ҳеч бўлмаганда иккитаси a тўғри чизиқни кесиб ўтишини исботланг.
   Кўрсатма: Параллел тўғри чизиқлар аксиомасидан фойдаланинг.
6. l тўғри чизиқни чизинг, ундан ташқарида ётган A, B нуқталарини белгиланг. Бу нуқталарнинг ҳар бири орқали l тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар ўтказинг. Бу тўғри чизиқлар қандай жойлашади?
7. a, b тўғри чизиқлар берилган бўлиб, $a \parallel b$ бўлса, унда $b \parallel a$ бўладими? Изоҳлаб беринг.
8. a ва b тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади. Уларнинг ҳар бирига параллел бўлган тўғри чизиқ борми? Улар нечта? Тушунтириб беринг.
9. a, b, c тўғри чизиқлар берилган, $a \parallel b$ ва b, c тўғри чизиқлари кесишади. a ва c тўғри чизиқлар ҳам ўзаро кесишишини исботланг.

6-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИК АЛОМАТЛАРИ

a ва b тўғри чизиқларни l тўғри чизиғи A, B нуқталарда кесиб ўтади (63-расм). У ҳолда улар саккизта бурчак ҳосил қилади. Бу бурчаклар расмда рақамлар билан белгилаб қўйилган. Бу ҳолда l тўғри чизиқни кесувчи деб атаймиз. Ҳосил бўлган бурчакларни қуйидагича аташ қабул қилинган. a ва b тўғри чизиқларининг орасида жойлашган бўлиб, l кесувчи тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётган икки бурчак **ички алмашинувчи бурчаклар** деб аталади. ($\angle 2$ ва $\angle 6$ ёки $\angle 1$ ва $\angle 5$). Бунда $\angle 3$ ва $\angle 7$ ёки $\angle 4$ ва $\angle 8$ **ташқи алмашинувчи бурчаклар** деб аталади.



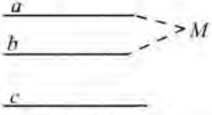
63-расм

a ва b тўғри чизиқларнинг орасида жойлашган бўлиб, l кесувчига нисбатан битта ярим текисликда ётган икки бурчак ($\angle 1$ ва $\angle 2$ ёки $\angle 5$ ва $\angle 6$) **ички бир томонли бурчаклар** деб аталади. У ҳолда $\angle 3$ ва $\angle 8$ ёки $\angle 4$ ва $\angle 7$ **ташқи бир томонли бурчаклар** деб аталади.

Бири a ва b тўғри чизиқларнинг орасида иккинчиси, уларга нисбатан ташқарида бўлиб, l кесувчи жойлашган ярим текисликларнинг бирида ётган икки бурчак **мос келувчи бурчаклар** деб аталади ($\angle 1$ ва $\angle 3$, ёки $\angle 6$ ва $\angle 4$, ёки $\angle 2$ ва $\angle 8$, ёки $\angle 5$ ва $\angle 7$).

Қуйидаги икки теорема тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларини таърифлайди.

5-теорема. **Агар икки тўғри чизиқнинг ҳар бири учинчи тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.**



64-расм

Исбот: $a\parallel c, b\parallel c$ тўғри чизиқлари берилган (64-расм). $a\parallel b$ эканлигини исботлаймиз.

Тескарисини фараз қилайлик, a ва b тўғри чизиқлар M нуқтада кесишади деб ҳисоблайлик, у ҳолда M нуқта орқали c тўғри чизиққа параллел бўлган икки тўғри чизиқ (a,b) ўтиб қолади. Бу V-аксиомага зид. Шундай қилиб, $a\parallel b$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

6-теорема: **Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ параллел бўлади.**

Исбот: a,b тўғри чизиқларни c тўғри чизиқ мос ҳолда A ва B нуқталарда кесиб ўтсин (65-расм). Агар $\angle 1$, $\angle 2$ ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда $a\parallel b$ бўлишини исбот қиламиз. AB кесманинг ўртасини O нуқта билан белгилаймиз.

a ва b тўғри чизиқлар параллел эмас, аксинча, улар P нуқтада кесишади, деб ҳисоблайлик.

Тенг фигураларни бир-бирига устма-уст қўйиш мумкин (2.2). $\angle 1=\angle 2$ ва $OA=OB$ бўлганлиги сабабли, уларни бир-бирига мос келадиган қилиб, устма-уст қўйиш мумкин. Шу мақсадда a,b,c тўғри чизиқларни O нуқта атрофида 180^0га бурсак, яъни O марказга нисбатан симметрик кўчирсак, унда A ва B нуқталари, AO ва OB, AC ва BD, AE ва BN нурлар, шу билан бирга a ва b тўғри чизиқларнинг ўрни алмашиб қолади. У ҳолда AC ва BN нурларнинг кесишиш P нуқтаси BD (AC) ва AE (BN) нурларнинг кесишиш нуқтаси Q га ўтиб қолади. Натижада a ва b тўғри чизиқлари P,Q икки нуқтада кесишиб қолади, яъни P, Q икки нуқта орқали бир биридан фарқли икки a ва b тўғри чизиқлар ўтиб қолади. Бу эса I_2 асосий хоссага зид.

Шунинг учун, *a,b* тўғри чизиқлар кесишмайди, демак, параллел бўлади. Теорема исбот қилинди.

Теорема $\angle 3$, $\angle 4$ ички алмашинувчи бурчаклар учун ҳам тўғри бўлиши аниқ. Чунки $\angle 1=\angle 2$ бўлганда $\angle 3=\angle 4$ бўлади. Аслида эса, $\angle 1+\angle 3=180^0$; $\angle 2+\angle 4=180^0$. Бундан $\angle 3=180^0-\angle 1$ ва $\angle 4 = 180^0 - \angle 2$.

Охирги тенгликнинг ўнг томонлари тенг, у ҳолда уларнинг чап томонлари ҳам тенг бўлади, яъни $\angle 3= \angle 4$ бўлади.

7-теорема: **Агар икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда; а) ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180^0га тенг бўлса; б) мос келувчи бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда берилган икки тўғри чизиқ параллел бўлади.**

Бу теоремаларни 6-теорема ёрдамида осонгина исбот қилинади.

Исбот: а) теоремани $\angle 1$ ва $\angle 4$ ички бир томонли бурчаклар учун (65-расм) исботлаймиз. Шартга кўра, $\angle 1+\angle 4=180^0$, бироқ $\angle 2+\angle 4=180^0$. Охирги тенгликдан $\angle 1=\angle 2$ келиб чиқади. Бу ҳол учун 6-теорема тўғри. Демак, $\angle 1+\angle 4 = 180^0$ бўлганда $a\parallel b$ бўлади.

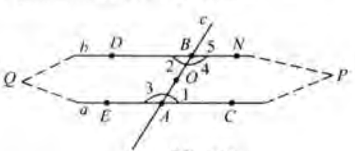
б) $\angle 1$ ва $\angle 5$ мос бурчаклар учун исбот қилайлик. Шартга кўра $\angle 1=\angle 5$ бўлиш маълум, шунингдек, вертикал бурчаклар бўлганлиги сабабли $\angle 2=\angle 5$. Натижада $\angle 1=\angle 2$ бўлади. Бу ҳол 6-теорема учун тўғри.

Шунинг учун $\angle 1=\angle 5$ бўлганда теорема тўғри бўлади, яъни $a\parallel b$.

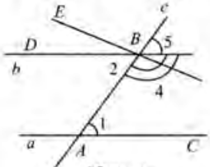
8-теорема. **Икки параллел тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлади (6-теоремага тескари теорема).**

Эслатма: Агар теореманинг шарти билан хулосасининг ўрнини алмаштирсак, у ҳолда берилган теоремага тескари теорема ҳосил бўлади.

Исбот: $a\parallel b$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин (66-расм). *c* тўғри чизиқ уларни кесиб ўтганда пайдо бўлган ички алмашинувчи бурчаклар $\angle 1$ ва $\angle 2$ бўлсин. $\angle 1=\angle 2$ бўлишини исбот қиламиз.



65-расм.



66-расм.

Тескарини фараз қилайлик, яъни $\angle 1 \neq \angle 2$ бўлсин. У ҳолда a тўғри чизиқ орқали ифодаланувчи ярим текисликларнинг BD нур ётган ярим текислигида $\angle 1 = \angle ABE$ бўладиган BE нур топилади (4.2). Унда 6-теорема асосида $BE \parallel a$ бўлиб қолади. Натижада B нуқта орқали a тўғри чизиққа параллел бўлган икки тўғри чизиқ (b ва BE) ўтади. Бу V асосий хоссага зид. Шундай қилиб, $\angle 1 = \angle 2$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

9-теорема. **Параллел икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесганда: а) ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180°га тенг бўлади; б) мос бурчаклари эса тенг бўлади (7-теоремага тескари теорема).**

Бу теореманинг исботи тўғридан-тўғри 8-теоремадан келиб чиқади. 9-теореманинг исботини иккала ҳол учун ҳам мустақил бажаришни тавсия қиламиз.

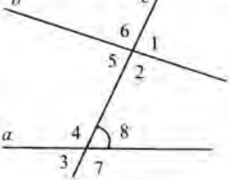
МАШҚЛАР

1. Ихтиёрий a ва b тўғри чизиқларни c тўғри чизиқ кесиб ўтганида саккизта бурчак ҳосил бўлади (67-расм). Бу бурчаклар рақамлар билан белгилаб кўрсатилган. Агар: а) $\angle 2 = 95^0$, $\angle 4 = 100^0$ бўлса, у ҳолда $\angle 5$ ва $\angle 8$ бурчакларни; б) $\angle 2 + \angle 8 = 160^0$ бўлса, $\angle 5 + \angle 4$ йиғиндисини; в) $\angle 4 - \angle 5 = 15^0$ бўлса, $\angle 2 - \angle 8$ айримасини топинг.

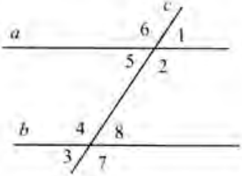
2. a ва b тўғри чизиқлар параллел, c тўғри чизиқ эса уларни кесиб ўтади (68-расм). Ҳосил бўлган бурчакларга нисбатан қуйидагиларни исботланг: 1) $\angle 1 = \angle 3$; 2) $\angle 1 = \angle 8$, 3) $\angle 6 = \angle 7$; 7) $\angle 7 + \angle 1 = 180^0$.

Кўрсатма: Тўғри чизиқларнинг параллеллиги, вертикал бурчакларнинг тенглигидан фойдаланинг.

3. Икки параллел тўғри чизиқнинг учинчи тўғри чизиқ билан кесганда пайдо бўлган саккизта бурчакдан бири 65°га тенг. Қолган бурчакларни топинг.



67-расм.



68-расм.

4. a,b параллел тўғри чизиқлар c тўғри чизиқ билан кесишади. Ички бурчаклардан бири 123^0га тенг. Бу бурчакнинг биссектрисаси иккинчи тўғри чизиқни қандай бурчак остида кесиб ўтади?

5. Икки параллел тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиқ билан кесишади. Берилган ички бурчакнинг, унга бир ёқли ички бурчакнинг ва берилган ички бурчакка вертикал бурчакнинг йиғиндиси 240^0га тенг. Берилган бурчакка мос келувчи бурчакни топинг.

6. c тўғри чизиқ AB тўғри чизиқни E нуқта, CD тўғри чизиқни эса F нуқтада кесиб ўтади. Агар: а) $\angle AEF=90^0$ ва $\angle BEC=90^0$ бўлса; б) B ва D нуқталар c тўғри чизиқнинг бир томонида, ётиб, $\angle BEF=86^0 47'$ ва $\angle EFD=93^0 13'$ бўлса, AB ва CD тўғри чизиқлар параллел бўладими?

7. 1-масалада: 1) $\angle 6=92^0$; 2) $\angle 2=30^0$ бўлса, a ва b тўғри чизиқлар параллел бўлиши учун $\angle 8$ни қандай ўзгартириш керак?

8. Параллел тўғри чизиқларни учинчи бир тўғри чизиқ кесиб ўтганда, ҳосил бўлган ички алмашинувчи (ёки мос келувчи) бурчакларнинг биссектрисалари параллел бўлишини исботланг.

9. Параллел икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда ҳосил бўлган ички бир томонли бурчакларнинг айирмаси 40^0га тенг. Бу бурчакларни топинг.

10. 9-теореманинг а) қисмини исботланг.

11. 9-теореманинг б) қисмини исботланг.

7-§. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ОҒМА

Текисликда икки тўғри чизиқ турлича жойланиши мумкин. AB ва CB тўғри чизиқлар O нуқтада кесишиб, ўзаро тўғри бурчак ҳосил қилсин (69-расм). Унда $\angle BOD=90^0$ бўлади. Бу ёйиқ бурчакнинг ярми бўлганлиги учун, $\angle DOA=90^0$, $\angle COB=90^0$ бўлиши маълум. Худди шунга ўхшаш, $\angle AOC=90^0$ га тенг бўлди. Бу ҳолда AB ва CD тўғри чизиқлари **перпендикуляр**[1] бўлади.

Таъриф: **Тўғри бурчак остида кесишган икки тўғри чизиқ ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар деб аталади.**

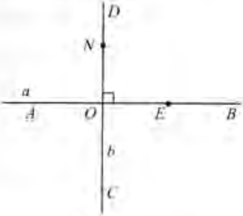
Перпендикуляр сўзи қисқача "$\perp$" белги билан белгиланади. У ҳолда «AB тўғри чизиғи CD тўғри чизиққа перпендикуляр» эканлигини қисқача $AB \perp CD$ деб ёзамиз. Айрим ҳолларда AB,

---

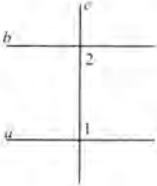
[1] Лотинча «перпендикулярис» сўзидан олинган бўлиб, «тик чизиқ» маъносини билдиради.

CD тўғри чизиқларни фақат биргина a,b ҳарфлари билан белгиланади ва уларнинг перпендикуляр эканлиги $a \perp b$ кўринишида ёзилади.

Перпендикуляр тўғри чизиқларда ётган кесмалар ҳам, нурлар ҳам перпендикуляр бўлади. Унда 69-расмдаги OB ва OD нурлар, шунингдек, OE, ON кесмалар ҳам перпендикуляр деб ҳисобланади.



69-расм



70 расм

Перпендикуляр тўғри чизиқларнинг хоссалари

10-теорема. **Бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.**

Исбот: $a \perp b$ ва $b \perp c$ бўлган a,b,c тўғри чизиқлар берилган (70-расм). $\angle 1=90^0$, $\angle 2=90^0$ ва $\angle 1$ билан $\angle 2$ ички бир томонли бурчаклар: $\angle 1+\angle 2=180^0$. Унда 7-теореманинг асосида $a \parallel b$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

11-теорема. **Агар тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқларнинг бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ иккинчи чизиққа ҳам перпендикуляр бўлади.**

Теоремани мустақил исбот қилинг (исботда 4-5 - теоремалардан фойдаланишни тавсия қиламиз).

12-теорема. **Берилган тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси орқали ўтиб, унга перпендикуляр бўлган фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.**

Исбот: a тўғри чизиқ берилган бўлсин (71-расм). Бу тўғри чизиқдан ихтиёрий O нуқтани оламиз. a тўғри чизиқ орқали ифодаланган ярим текисликларнинг бирида OA нурдан бошлаб $\angle AOC=90^0$ бўлган бурчакни ўлчаб қўямиз. У ҳолда $OC \perp OA$ бўлади. Натижада OC нурни тўлдирувчи OD нурни ясасак, b тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Демак, $a \perp b$ бўлади.

Энди O нуқта орқали ўтувчи ва a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган фақат биргина b тўғри чизиқ бўлишини исботлаймиз.

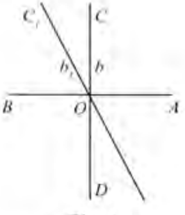
OC нур ётган ярим текисликда $OC_1 \perp OA$ бўладиган яна бир OC_1, нур бор деб ҳисоблайлик, бу $b_1 \perp a$ тўғри чизиқни аниқлайди. Унда $\angle AOC_1=90^0$ бўлади. Бироқ, IV$_2$ аксиома бўйича берилган ярим текисликда OA нурдан бошлаб 90^0 га тенг бўлган фақат биргина бурчакни ўлчаб қўйиш мумкин. Натижада OC_1, нур OC нурга, ёки b_1 тўғри чизиқ b тўғри чизиққа устма-уст тушади.

Демак, a тўғри чизиқнинг ихтиёрий O нуқтаси орқали ўтиб, унга перпендикуляр бўлган фақат биргина b тўғри чизиқ мавжуд. Теорема исботланди.

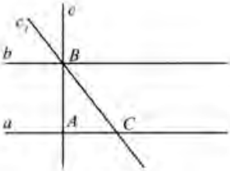
13-теорема. **Тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали унга перпендикуляр бўлган фақат битта тўғри чизиқни ўтказиш мумкин.**

Исбот: a тўғри чизиқ ва унда ётмаган B нуқта берилган (72-расм). B нуқта орқали a тўғри чизиққа параллел бўлган b тўғри чизиқни ясаймиз. B нуқта орқали $c \perp a$ тўғри чизиқни чизамиз (12-теорема). У ҳолда $c \perp a$ бўлиб, улар A нуқтада кесишади (4-, 11-теоремалар).

B нуқта орқали ўтувчи ва a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган фақат битта c тўғри чизиқ бор. Аксинча, яна бир c тўғри чизиқ бор деб ҳисоблайлик. Унда a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган c ва c_1 тўғри чизиқлар B нуқтада кесишиб қолади. Бу 10-теоремага зид. Демак, B нуқта орқали ўтувчи ва a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган фақат битта тўғри чизиқ бўлади. Теорема исбот қилинди.



71-расм



72-расм

B нуқтадан a тўғри чизиққа туширилган BA кесмани **перпендикуляр**, BC кесмани эса **оғма** деб атаймиз. A нуқта AB перпендикулярнинг асоси, C нуқта эса BC оғманинг асоси деб аталади. *AC* кесма *BC* оғманинг *a* тўғри чизиқдаги проекцияси деб аталади (72-расм).

BA кесманинг узунлиги *B* нуқтадан *a* тўғри чизиққача бўлган масофага тенг деб ҳисобланади.

Натижа: **Параллел икки тўғри чизиқнинг орасидаги масофа улардан бирининг ихтиёрий нуқтасидан иккинчисига туширилган перпендикуляр узунлигига тенг.** Бу натижанинг тўғрилиги 11-, 13-теоремалардан келиб чиқади.

МАШҚЛАР

1. *a* тўғри чизиқ берилган. Транспортирдан фойдаланиб, унга перпендикуляр бўлган *b* тўғри чизиқни ясанг.

2. *a* тўғри чизиқ ва ундан ташқарида ётган *A* нуқта берилган. Чизмачилик учбурчагидан фойдаланиб, *A* нуқта орқали ўтувчи ва *a* тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган *b* тўғри чизиқни ясанг.

3. Агар *A* нуқта *a* тўғри чизиқда ётса, у ҳолда 2-масалани қандай ечиш мумкин?

4. 2-масаладаги *A* нуқтадан *a* тўғри чизиққача бўлган оралиқ сифатида қайси кесма узунлигини олиш мумкин?

5. *a* ва *b* тўғри чизиқлар кесишишидан ҳосил бўлган бурчакларнинг ичидан учтаси ўзаро тенг бўлса, унда $a \perp b$ бўлишини исботланг.

6. *a,b,c* тўғри чизиқлар берилган. Агар $a \perp c, b \perp c$ бўлса, *a* ва *b* тўғри чизиқлар параллел бўлишини исботланг.

Кўрсатма: тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатидан фойдаланинг.

7. Бир тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр ва оғма кесишади. Шуни исбот қилинг.

8. *l* тўғри чизиқни чизинг, ундан *A,B* ва *C* нуқталарни белгиланг. Бу нуқталар орқали *l* га перпендикуляр *AD, BE* ва *CF* кесмаларни ясанг. а) параллел; б) перпендикуляр кесмаларни айтинг.

9. *ABCD* тўғри тўртбурчак берилган. Унинг: а) қарама-қарши томонлари орқали ўтказилган тўғри чизиқлар параллел; б) қўшни бўлган томонлари орқали ўтган тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг.

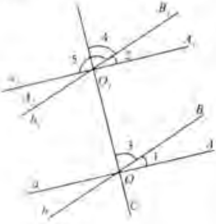
10. *AB,CD* тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр ва *O* нуқтада кесишади. *OE* ва *OF* нурлар *OD* нур ётган ярим текисликда ётади. Агар $\angle EOF=105^0$ ва $\angle BOF=28^0$ бўлса, *DOF* ва EOD бурчакларни ҳисобланг.

11. $a \parallel b$ тўғри чизиқлар берилган a тўғри чизиқнинг A ва B нуқталаридан b тўғри чизиққача бўлган масофалар тенг бўлишини исботланг.

8-§. МОС ТОМОНЛАРИ ПАРАЛЛЕЛ БЎЛГАН БУРЧАКЛАР

Иккита бурчак берилган бўлса, уларнинг мос томонлари турлича жойланиши мумкин. Биз қуйида уларнинг параллел ёки перпендикуляр бўлган ҳолларини кўриб чиқамиз. Мос томонлари параллел бўлган икки бурчак бир хил йўналган ёки қарама-қарши йўналган бўлиши мумкин. Бунда бурчакларни ташкил қилган нурлар ҳисобга олинади.

14-теорема. **Мос томонлари параллел бўлган икки бурчак тенг бўлади ёки уларнинг йиғиндиси 180^0ни ташкил қилади.**



73-расм.

Исбот: $\angle 1$ ва $\angle 2$ бурчаклар берилган бўлсин. Уларнинг мос томонлар параллел бўлсин (73-расм): $a \parallel a_1, b \parallel b_1$. Бурчакларнинг учлари O ва O_1 бўлади.

Теорема шартини қаноатлантирувчи икки бурчак $\angle 1$ билан $\angle 2$ ёки $\angle 1$ билан $\angle 5$ бўлади.

O, O_1 нуқта орқали c тўғри чизиқни чизамиз.

1) $\angle 1$ ва $\angle 2$ ни кўриб чиқайлик. Бунда $OA \parallel O_1A_1$ ва $OB \parallel O_1B_1$ нурлар бир хил йўналган бўлсин. 7-теорема асосида: $\angle 3 = \angle 4$ ва $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, бундан $\angle 1 = \angle 2$.

Теореманинг биринчи қисми исбот қилинди.

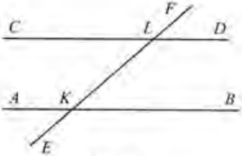
2) $\angle 1$ ва $\angle 5$ бурчакларни кўриб чиқайлик. $OA \parallel O_1A_1$ бўлиб, бироқ бу нурлар қарама-қарши йўналган бўлсин. Бунда $\angle 5$ *ҳам* a_1 ва b_1, тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакларни ифодалайди. Бунда $\angle 2 + \angle 5 = 180^0$ бўлиши аниқ.

Энди $\angle 2 = \angle 1$ бўлганлиги учун $\angle 1 + \angle 5 = 180^0$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

Натижа: Мос томонлари бир хил (ёки қарама-қарши) йўналган икки бурчак тенг бўлади.

Худди шундай усул билан мос томонлари перпендикуляр бўлган икки ўткир (ўтмас) бурчакларнинг тенглигини исбот қилиш мумкин.

МАШҚЛАР



74-расм.

1. $\angle ABC=75^0$ ва $\angle BCD=125^0$ бурчаклар берилган. Бу бурчакларнинг мос BA ва CD томонлари параллел бўладими? Жавобингизни асосланг.
2. $AB\parallel CD$ тўғри чизиқлар берилган (74-расм). EF тўғри чизиқ AB ни K нуқтада, CDни эса L нуқтада кесиб ўтади. Мос томонлари параллел ва: а) бир хил йўналган бурчакларни; б) қарама-қарши йўналган бурчакларни аниқланг ва уларни белгилаб ёзинг.
3. Мос томонлари қарама-қарши йўналган ва ҳар бири ёйиқ бурчаклардан кичик бўлган икки бурчак тенг бўлишини исботланг.
4. Ҳар бири ёйиқ бурчаклардан кичик ва биттадан томонлари параллел, иккинчи томонлари қарама-қарши йўналган икки бурчакнинг йиғиндиси 180^0га тенг бўлишини исботланг.
5. Мос томонлари перпендикуляр бўлган иккита ўткир (ўтмас) бурчакларнинг тенглигини исбот қилинг.
6. AB, AC ва KP турли нурлар бўлиб, $AB\parallel KP$ ва $AC\parallel KP$, бўлса $\angle BAC$ни топинг.
7. $\angle AOB=52^0$. Шу бурчак ичида ётган Д нуқтадан берилган бурчакнинг томонларига параллел бўлган тўғри чизиқлар ўтказилган. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ва уларнинг берилган бурчак томонлари билан ҳосил қилган бурчакларини топинг.
8. Томонлари параллел бўлган икки бурчак берилган, уларнинг бири иккинчисидан 90^0га катта. Берилган бурчакларни топинг.
9. Мос томонлари перпендикуляр бўлган икки бурчак берилган. Уларнинг бири иккинчисидан 4 марта кичик. Шу бурчакларни топинг.
10. $KM\perp LN$ тўғри чизиқлар O нуқтада кесишади. $\angle POM+\angle LOD=75^0$ ва $\angle KOD=58^0$ бўлса, POM ва LOP бурчакларни топинг.

II БОБНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Параллел тўғри чизиқларга таъриф беринг.
2. Қандай кесмалар (нурлар) параллел бўлади?
3. Параллеллик аксиомаси қандай ифодаланади?
4. Ички алмашинувчи, ички бир томонли, ички ва ташқи мос бурчакларни тушунтириб беринг.
5. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик аломатининг биринчи белгисини айтинг.
6. 2-аломати қандай ўқилади?
7. 7-теореманинг ўқилишини айтиб беринг.
8. Қандай икки тўғри чизиқ перпендикуляр деб аталади?
9. Перпендикуляр тўғри чизиқлар қандай хоссаларга эга?
10. Тўғри чизиқда берилган нуқта орқали ўтувчи ва унга перпендикуляр бўлган нечта тўғри чизиқ мавжуд?

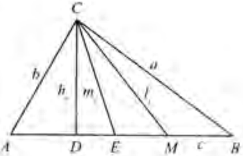
II БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Ички (ташқи) алмашинувчи бурчакларнинг бир жуфти тенг бўлса, у ҳолда уларнинг иккинчи жуфти ҳам тенг бўлишини исботланг.
2. Агар ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180^0га тенг бўлса, ички бурчакларнинг ҳар бир жуфти тенг бўлишини исботланг.
3. AB ва CD нурлар кесишмайди. Уларни параллел деб ҳисоблаш мумкинми?
4. Икки параллел тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиқ билан кесишганда: а) бир бурчаги 50^0га; б) ички алмашинувчи бурчакларининг йиғиндиси 110^0га; в) ички бир томонли бурчакларнинг айирмаси 40^0 га тенг бўлса, қолган бурчакларини топинг.
5. Кесишувчи тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ ҳар доим кесишишини исботланг.
6. Параллел тўғри чизиқларнинг ихтиёрий вертикал бурчакларининг биссектрисалари параллел бўлишини исботланг.
7. a,b,c,d – тўғри чизиқлар, $a\|b,\ b\|c, c\|d$ берилган. $a\|d$ бўлишини исботланг.

III БОБ. УЧБУРЧАКЛАР

9-§. УЧБУРЧАКЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Таъриф: Бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқтадан ва уларни кетма-кет иккитадан туташтирувчи учта кесмадан иборат фигура учбурчак дейилади.



75-расм

Бир тўғри чизиқда ётмаган *A,B,C* уч нуқта берилган бўлсин (75-расм). *AB, BC, CA* кесмаларини чизсак, учбурчак ҳосил бўлади. Уни *ABC* учбурчак деб аталади. Уни қисқача «ΔABC» деб белгиланади (Δ - учбурчак деган белги). *A,B,C* нуқталар учбурчакнинг учлари, *AB,BC* ва *CA* кесмалар унинг томонлари деб аталади *AB, AC* томонлари орасидаги $\angle BAC$, ҳудди шундай $\angle ACB$, $\angle CBA$ бурчаклари учбурчакнинг бурчаклари бўлиб ҳисобланади. Демак, учбурчакнинг учта томони, учта бурчаги бор. Учбурчакнинг томонлари ва бурчаклари унинг **асосий элементлари** деб аталади. Учбурчакнинг *A,B,C* учлари қаршисида ётган мос томонлари мос ҳолда *a,b,c* ҳарфлари билан белгиланади. $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Учбурчакнинг бурчаклари учларига нисбатан $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ деб ҳам белгиланади, уларни учбурчакнинг ички бурчаклари деб аталади.

Учбурчакнинг учи билан унинг қаршисида ётган томонининг ўртасини туташтирувчи кесма унинг **медиана**[1]**си** деб аталади. *c* томонининг ўртаси *E* нуқта бўлса, *CE* кесма *C* учидан ўтказилган медиана бўлади $(m_c = CE, E \in c)$. Учбурчакнинг медианаларини томонларига нисбатан m_a, m_b, m_c орқали белгилаш қабул қилинган.

---

[1] Лотинча сўз бўлиб, «ўртача» деган маънони билдиради.

Учбурчакнинг **биссектрисаси** деб унинг бурчак биссектрисасининг шу бурчак учидан унинг қаршисида ётган томон билан кесилишгунча бўлган кесмасига айтилади.

ΔABC да C бурчаги биссектрисасининг CM кесмаси шу учбурчакнинг C учидан ўтказилган биссектрисаси бўлади.

Учбурчакнинг биссектрисалари учларига нисбатан ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c орқали белгиланади ($\ell_c = CM$).

Учбурчакнинг учидан чиқиб, унинг қаршисида ётган томонга перпендикуляр бўлган кесма учбурчакнинг **баландлиги** деб аталади. 75-расмда $CD \perp AB$, шунинг учун CD кесма учбурчакнинг C учидан AB томонга туширилган баландлик бўлади. Учбурчакнинг баландликлари h_a, h_b, h_c (a, b, c томонларига нисбатан) орқали белгиланади ($h_c = CD$). Учбурчакнинг медиана, биссектриса ва баландликлари унинг **асосий чизиқлари** деб аталади.

Учбурчак томонларининг йиғиндиси унинг **периметри**[1] деб аталади. $P=a+b+c$; P – периметр.

Учбурчакни унинг асосий элементларига нисбатан турларга бўлиш мумкин.

а) Томонларига нисбатан:

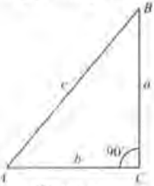
1. Агар учбурчакнинг ҳамма томонлари бир-бирига тенг бўлмаса, у ҳолда бу учбурчак **турли томонли учбурчак** деб аталади.

2. Агар учбурчакнинг икки томони тенг бўлса, бу учбурчак **тенг ёнли** учбурчак дейилади. Тенг томонлари унинг ён томонлари, учинчи томони эса унинг асоси деб аталади.

3. Агар учбурчакнинг барча томонлари тенг бўлса, бу учбурчак **тенг томонли учбурчак** деб аталади.

б) Бурчакларига нисбатан турлари

1. Агар учбурчакнинг ҳамма бурчаклари ўткир бурчак бўлса, бу учбурчак **ўткир бурчакли учбурчак** дейилади.



76-расм

2. Агар учбурчакнинг бир бурчаги тўғри бурчак бўлса, бу учбурчак **тўғри бурчакли учбурчак дейилади**. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчагига ёпишган томонлари унинг **катет**[2]**лари**, тўғри бурчак қаршисидаги томони унинг **гипотенузаси**[3] деб аталади. 76-расмда ΔABCда $\angle C=90^0$ - тўғри бурчак, a, b - катетлари, c - гипотенузаси бўлади.

---

[1] Грекча сўз бўлиб, «бирор нарсанинг учларига тиралган» деган маънони билдиради.

[2] Грекча сўз бўлиб, «ясси фигуранинг чегараси» деган маънони билдиради.

[3] Грекча сўз бўлиб, «юқорига тик» деган маънони беради.

3. Агар учбурчакнинг бир бурчаги ўтмас бурчак бўлса, бу учбурчак **ўтмас бурчакли учбурчак** дейилади. 75-расмда CEM, CMB, CEB учбурчаклари ўтмас бурчакли учбурчаклар бўлиб ҳисобланади. Шу учбурчакларнинг ўтмас бурчакларини кўрсатинг.

МАШҚЛАР

1. Бир тўғри чизиқда ётмаган D, E, M учта нуқтани белгилаб, DE, EM, MD кесмаларни чизинг. Ҳосил бўлган учбурчакнинг учларини, томонларини, бурчакларини айтинг ва уларни белгилаб кўрсатинг.

2. ABC учбурчак берилган. D нуқта AB томонда ётади. CD кесмани чизинг. Нечта учбурчак ҳосил бўлди? Уларни белгилаб ёзинг.

3. «Ҳар қандай учбурчакнинг ихтиёрий томонининг узунлиги қолган икки томонлари узунликлари йиғиндисидан кичик бўлади», деган асосий хоссани KLF учбурчакнинг ҳар бир томони учун ёзиб кўрсатинг.

4. Томонлари қуйидагича берилган учбурчак бўлиши мумкинми: а) 7м; 7м; 7м; б) 40 см; 1 дм; 3 дм; в) 4,5 см; 7 см, 5 см; г) 3м, 4,5м; 1м. Изоҳлаб беринг.

5. Учбурчакнинг томонлари: а) 7,5 см; 6см; 4,5см; б) 8,1 м; 7,9 м; 12м бўлса, унинг периметрини топинг.

6. Учбурчак кўринишидаги ер майдонининг периметри 1248м. Унинг икки томони: а) $a = 476м, b = 504м$;

б) $a = 540м, b = 400м$ бўлса, унинг учинчи томонини топинг.

7. ABC учбурчак чизинг. а) AB томонини чизғич билан ўлчаб, CD медианани ясанг; б) тўғри бурчакли учбурчакда чизғич ёрдамида AB томонига CE баландлик туширинг; в) транспортир ёрдамида C бурчакни ўлчаб, CM биссектрисани ясанг. Ҳар бир босқични изоҳлаб беринг.

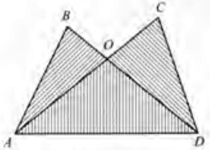
8. DEC учбурчак берилган. Унинг томонларини ўлчамай туриб, OM нурга O нуқтадан бошлаб, унинг периметрига тенг бўлган кесмани циркулй ёрдамида қўйинг.

9. Учбурчакнинг ҳар бир томони периметрнинг ярмидан кичик бўлишини исботланг.

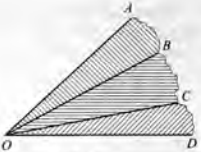
Кўрсатма: Учбурчакнинг a, b, c томонларига нисбатан $a<b+c$ тенгсизлигидан фойдаланинг.

10. Учбурчак бир томонининг узунлиги b дм. Қолган икки томони $2b$ дм, $3b$ дм бўлиши мумкинми?

11. Учбурчак икки томонининг йиғиндиси 72дм, учинчи томонини ундан 18дмга қисқа бўлса, учбурчак периметрини топинг.

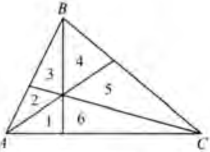


76^{а} - расм

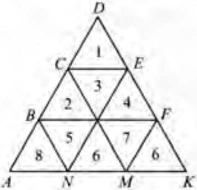


76^{б} - расм

12. 76^{а}-расмда нечта учбурчакни кўряпсиз? Уларни айтинг.
13. 76^{б}-расмда нечта бурчакни кўряпсиз? Уларни айтинг
14. 76^{в} расмда сиз нечта учбурчакни кўрябсиз? Уларни айтинг.
15. 76^{г} -расмда сиз нечта учбурчак, нечта параллелограмм ва нечта трапецияни кўриб турибсиз? Уларни сананг?



76^{в} - расм



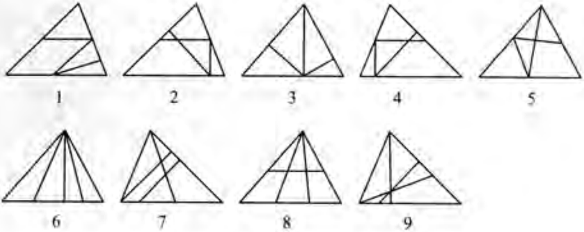
76^{г} -расм

16. Юқоридаги расмлардан (76^{д}-расм) 1-сидан бешта, 2-сидан олтита, 3-сидан еттита, 4-сидан саккизта, 5-сидан тўққизта, 6-сидан ўнта, 7-сидан ўн битта, 8-сидан ўн иккита, 9-сидан ўн учта учбурчакни кўрсатинг.

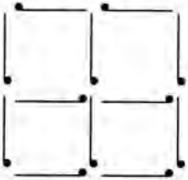
17. 76^{е}-расмда ўн икки таёқчадан (гугурт чўпидан) квадрат ясалган. Фақат иккита квадрат қоладиган қилиб, қайси таёқчаларни олиш керак?

Ечиш: Масалани ечиш учун аввал бу расмда беш квадрат (битта катта тўртта кичик) бор эканлигини ҳисобга олиш керак. Енгиллик учун таёқчаларни номерлаб олайлик. Агар биринчи ва иккинчи таёқчаларни олиб ташласак, унда 76 ж -расмдагидек икки квадрат қолади.

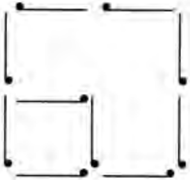
Шунга ўхшаш агар иккинчи ва учинчи, учинчи ва тўртинчи, тўртинчи ва биринчи таёқчаларни олиб ташласак ҳам иккитагина квадрат қолишини ўзингиз текшириб кўриб, тегишли расмларни чизинг.



$76^{а}$-расм



$76^{б}$-расм



$76^{в}$-расм

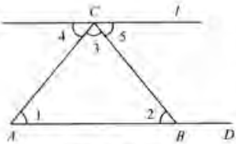
10-§.УЧБУРЧАК ИЧКИ БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ

Ҳар қандай учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси қуйидаги теоремага асосланади.

15-теорема. **Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180^0га тенг.**

Исбот: ΔABC берилсин (77-расм). $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ унинг ички бурчаклари бўлсин. C нуқта орқали AB томонига параллел бўлган ℓ тўғри чизиқни ўтказамиз. V аксиома асосида ℓ тўғри чизиқ фақат битта бўлади.

$AB \| \ell$ тўғри чизиқларни AC тўғри чизиқ билан кесганда, ички алмашинувчи бурчаклар бўлганлиги сабабли, $\angle 1 = \angle 4$, шунингдек, $\angle 2 = \angle 5$ бўлади (8-теорема).



77-расм

Бироқ $\angle 4+\angle 3+\angle 5=180^0$ (ёйиқ бурчак). Унда $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

Учбурчакнинг ички битта бурчагига қўшни бўлган бурчак учбурчакнинг **ташқи бурчаги** дейилади. 77-расмда ΔABC нинг $\angle 2$га қўшни бўлган бурчак DBC бўлади. Шунинг учун бу бурчак ташқи бурчак бўлиб ҳисобланади.

Натижалар:

1. Учбурчакнинг ташқи бурчаги унга қўшни бўлмаган икки ички бурчаклари йиғиндисига тенг.

15-теорема асосида:

$$\angle 1+\angle 3+\angle 2=180^0 \text{ ёки } \angle 1+\angle 3=180^0-\angle 2 \qquad (1)$$

DBC бурчаги $\angle 2$га ташқи бурчак:

$$\angle DBC+\angle 2=180^0 \text{ ёки } \angle DBC=180^0-\angle 2 \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан

$$\angle DBC=\angle 1-\angle 3 \qquad (3)$$

бўлади.

1– натижа исботланди.

2. (3) тенгликдан: $\angle 1<\angle DBC$, $\angle 3<\angle DBC$. Демак, учбурчакнинг ташқи бурчаги унга қўшни бўлмаган ташқи бурчакларининг ҳар биридан катта бўлади.

3. Учбурчакнинг биттадан ортиқ ўтмас (тўғри) бурчаги бўлмайди. Бу 15-теоремадан келиб чиқади. Демак, тўғри бурчакли учбурчакнинг иккита ўткир бурчаги бўлади.

4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчакларининг йиғиндиси 90^0га тенг.

ΔABCда $\angle 2=90^0$ бўлсин. У ҳолда $\angle 1$, $\angle 3$ лар ўткир бурчаклар бўлади. 15-теорема асосида $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^0$ ёки $\angle 1+90^0+\angle 3=180^0$ бўлади. Бундан $\angle 1+\angle 3=90^0$ бўлади.

5. Агар бир учбурчакнинг икки бурчаги, иккинчи учбурчакнинг мос келувчи икки бурчагига тенг бўлса, унда уларнинг учинчи бурчаги ҳам тенг бўлади.

ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар берилсин. $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$ бўлсин. 15-теорема асосида $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ бўлади. Бундан $\angle C=\angle C'$ бўлиши аниқ.

Демак, икки тўғри бурчакли учбурчакнинг биттадан ўткир бурчаклари тенг бўлса, унда уларнинг иккинчи ўткир бурчаглари ҳам тенг бўлади.

МАШҚЛАР

1. Бурчаклари: а) 45^0; 35^0; 110^0; .) 70^0; 60^0; 50^0; в) 90^0; 60^0; 45^0 бўлган учбурчак бўлиши мумкинми?

2. Учбурчакнинг икки бурчаги берилган: а) 30^0, 50^0; б) 60^0, 30^0; в) 29^0, 30^0, г) 81^0, 90^0. Учинчи бурчагини топинг.

3. Учбурчакнинг бир бурчаги унинг бурчаклари йиғиндисининг $\frac{2}{3}$ қисмига, иккинчи бурчаги эса $\frac{4}{9}$ қисмини ташкил қилса, шу учбурчакнинг ҳар бир бурчагини топинг.

4. Учбурчакнинг бир бурчаги иккинчи бурчагидан 45^0 га катта, учинчи бурчаги эса иккинчи бурчагидан 15^0га кичик бўлса, унинг бурчакларини топинг.

5. ΔABCда $\angle A+\angle B=110^0$ ва $\angle B+\angle C=120^0$ бўлса, ҳар бир бурчакни топинг.

6. Агар учбурчак бурчакларининг нисбати 4:2:3га тенг бўлса, шу учбурчак бурчакларини топинг.

7. Учбурчакнинг икки бурчагининг нисбати 5:7га тенг, учинчи бурчаги кичик бурчагидан 44^0га катта. Унинг учинчи бурчагини топинг.

8. ABCучбурчакда $\angle A=60^0$, $\angle B=30^0$; CD– унинг баландлиги, CE– биссектрисаси. DCE бурчакни топинг.

9. ΔDEF да $\angle D=76^0, \angle F=60^0$. D ва E бурчакларнинг биссектрисалари қандай бурчак билан кесишади?

10. Учбурчакнинг икки учидаги ташқи бурчаклари 110^0га ва 160^0га тенг. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

11. Учбурчакнинг икки ташқи бурчаги 120^0 ва 160^0. Учинчи ташқи бурчакни топинг.

12. ABC учбурчагининг B ва C учларидаги ташқи бурчакларининг йиғиндиси 250^0. Учбурчакнинг A ички бурчагини топинг.

13. Учбурчакнинг ички бурчакларининг бири 50^0, ташқи бурчакларидан бири эса 85^0 бўлса, унинг қолган ички бурчакларини топинг.

14. Учбурчакда: а) икки ўтмас бурчак; б) икки тўғри бурчак; в) ўтмас ва тўғри бурчак бўла олмаслигини исботланг.

15. ΔABCда Bучидаги ташқи бурчаги A бурчагидан 3 марта катта ва Cбурчагидан 40^0га катта бўлса, унинг бурчакларини топинг.

16. Учбурчакнинг бурчакларидан бири 61^0. Унинг қолган икки бурчагининг биссектрисаларидан тузилган ўткир бурчакни топинг.

17. Параллел тўғри чизиқларнинг ички бир томонли бурчакларининг биссектрисалари перпендикуляр бўлишини исботланг.

18. ΔABCда B ва C бурчакларининг биссектрисалари O нуқтада кесишади. Агар BAC бурчак BOC бурчакнинг ярмига тенг бўлса, A бурчакни топинг.

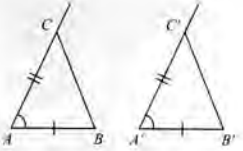
11-§. УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ. УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ТЕНГЛИКАЛОМАТЛАРИ

Фигуралар тенглигининг аломатлари ҳақидаги тушунча асосида (2.2) икки учбурчакнинг тенглигини аниқлаш мумкин. Агар икки учбурчакнинг мос томонлари ва бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар **тенг** деб аталади. ABCва $A'B'C'$ учбурчакларнинг тенглиги $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ кўринишида ёзилади. Бунда $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC= A'C'$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ бўлади. Учбурчакларнинг тенглигини исботлаб кўрсатишда бу олти шартнинг бажарилишини кўриб чиқиш керак. Лекин, уларнинг ҳаммасини исботлаб кўрсатиш шарт эмас. Ихтиёрий уч ҳолни тўғри эканлигини кўрсатиш етарли бўлади, чунки қолган ҳоллар ўша уч ҳолдан келиб чиқади. Шу уч ҳол **учбурчакнинг тенглик аломатлари** деб аталади.

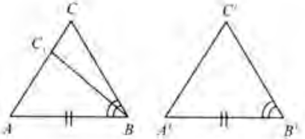
16-теорема. (Учбурчаклар тенглигининг 1-аломати). **Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.**

Исбот. $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ берилсин (78-расм). $AB=A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A=\angle A'$ бўлсин. Бунда $BC=B'C'$ бўлсин. Бунда $BC = B'C'$, $\angle B=\angle B'$ бўлишини исботласак, унда $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлади.

Кесмаларнинг тенглиги асосида AB кесмага $A'B'$ кесмани устма-уст қўйиш мумкин. Бунда A' билан A нуқта, B' нуқта билан B мос келади. AB тўғри чизиққа нисбатан аниқланган ярим текисликларнинг C нуқтаси ётган ярим текисликда AB нурдан бошлаб $\angle A=\angle A'$ тенглик бажариладиган қилиб AC нурни ясаймиз(4.3.). Бунда $AC = A'C'$ бўлганлиги сабабли C' нуқта C билан мос келади. Натижада $BC = B'C'$ бўлади. Худди шундай $\angle B$ ва $\angle B'$, $\angle C$ ва $\angle C'$ лар ҳам мос келади. $\angle B=\angle B'$; $\angle C = \angle C'$ бўлади. Берилган учбурчаклар тенг бўлади. Теорема исбот қилинди.



78-расм



79-расм

17-теорема. (Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломати). **Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги иккинчи учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган икки бурчагига тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.**

Исбот. ΔABC ва $A'B'C'$ берилган (79-расм). Бунда $AB = A'B'$, $\angle \grave{A} = \angle \grave{A}'$; $\angle B = \angle B'$. Берилган учбурчакларнинг тенглигини исбот қиламиз.

Агар $AC = A'C'$ бўлишини исбот қилсак, унда 16-теорема асосида берилган учбурчакларнинг тенглиги исбот қилинган бўлади. $AC \neq A'C'$ деб ҳисоблайлик. У ҳолда AC нурда $AC_1 = A'C'$ бўладиган қилиб, C_1 нуқтани топиш мумкин. Унда 16-теорема асосида $\Delta ABC_1 = \Delta A'B'C'$ бўлади. Бундан $\angle ABC_1 = \angle B'$ бўлиб қолади. Бироқ шарт бўйича $\angle B = \angle ABC = \angle B'$. Натижада AB тўғри чизиққа нисбатан аниқланган ярим текисликларнинг BC нур ўтган қисмидан CB' бурчакка тенг бўладиган қилиб икки нур (BC, BC_1) ясалади. Бу IV_2 аксиомага зид. Шунинг учун $AC = A'C'$ бўлади. Унда 16-теорема асосида $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг AC диагонали бўйича бўлганда ABC ва ACD учбурчаклар ҳосил бўлади. Уларнинг тенглигини икки усул билан: а) устма-уст қўйиш усули; б) учбурчаклар тенглигининг биринчи ва иккинчи аломатлари асосида исботланг.
2. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига тескари теорема: Агар икки учбурчак тенг бўлса, ҳолда биринчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги мос ҳолда иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига тенг бўлади. Исботланг.

   Кўрсатма: Учбурчаклар тенглигининг таърифидан фойдаланинг.

3. AB ва CD кесмалари O нуқтада кесишади ва $OA=OB$, $OC=OD$ бўлса: а) $\Delta OAC=\Delta OBD$, б) $AC=BD$, в) $AC \parallel BD$; г) $\Delta ACD=\Delta BDC$ларни исбот қилинг.
4. ABC учбурчакнинг AD медианаси давомига $DE=AD$ кесма қўйилган бўлса; а) $\Delta ABD=\Delta ECD$; б) $\Delta ACD=\Delta EBD$ эканлигини исботланг.
5. Учбурчаклар тенглигининг 2-аломатига тескари теоремани ифодаланг ва уни исботланг.
6. CD кесманинг учлари m ва n параллел тўғри чизиқларда ётади. CD кесманинг ўртасида ётган O нуқта орқали ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқнинг m ва n тўғри чизиқлар орасидаги кесмаси O нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.
7. KLM учбурчакда MD медиананинг давомига $DA=MD$, KF медиана давомига $FE=KF$ кесма ўлчаб қўйилган. A, L,E нуқталарининг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.
Кўрсатма: $LE \parallel KM$, $AL \parallel KM$ бўлишини кўрсатиб, тўғри чизиқларнинг параллеллик аксиомасидан фойдаланинг.
8. EK тўғри чизиқ орқали аниқланувчи ярим текисликларнинг бирида EKC ва EKM тенг ёнли бўлмаган учбурчаклар чизилган. Агар $\Delta EKC=\Delta KEM$ бўлса, $CM \parallel EK$ бўлишини исботланг.
9. $\Delta EFL=\Delta PQM$ бўлиб, $PQ=4{,}5$ см; $QM=7$ см, $MP=8{,}5$ см бўлса, у ҳолда EFL учбурчакнинг периметрини топинг.
10. 6 – масалада O нуқта орқали ўтувчи b тўғри чизиқ m,n тўғри чизиқларни E ва F нуқталарда кесиб ўтади, $EC=12$ см бўлса, DF оралиқни топинг.
11. Тенг учбурчакларнинг тенг томонларига ўтказилган медианалар тенг бўлишини исботланг.
12. Агар бир учбурчакнинг икки томони ва уларнинг бирига ўтказилган медианаси иккинчи учбурчакнинг медианасига мос равишда тенг бўлса, унда бу икки учбурчакнинг икки томони ва тенглигини исботланг.

12-§.ТЕНГ ЁНЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Учбурчаклар тенглигининг 1-ва 2- аломатларидан фойдаланиб, тенг ёнли учбурчакларга нисбатан бир нечта теоремаларни исботлаш мумкин.

18-теорема. **Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг.**

Исбот. Берилган (80 - расм) ABC учбурчакда $AC=BC$ бўлсин. AB - асоси. $\angle 3$ ва $\angle 4$ - асосидаги бурчаклари бўлса,

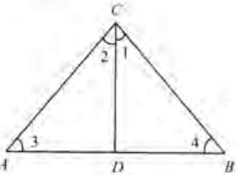
$\angle 3 = \angle 4$ эканлигини исботлаймиз. CD биссектрисасини ўтказсак, учбурчаклар тенглигининг 1-аломатига кўра $\Delta ACD = \Delta BCD$. (CD умумий томон, $AC=BC$, $\angle 2 = \angle 1$).

Бундан $\angle 3 = \angle 4$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

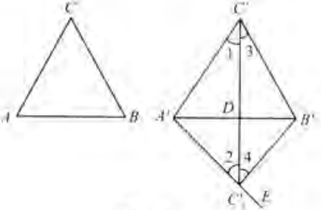
19-теорема. **Тенг ёнли учбурчакларнинг асосига ўтказилган биссектрисаси унинг медианаси ҳам, баландлиги ҳам бўлиб ҳисобланади.**

Исбот: 18-теоремадан фойдаланамиз. $\Delta ACD = \Delta BCD$ бўлганлиги сабабли, $AD=BD$ бўлади. Демак, CD – медиана. Шунингдек, $\angle ACD = \angle BCD$ ёки $\Delta ADC = \angle BDC = 90^0$ ($\angle BDA$ ёйиқ бурчакнинг ярми). Унда CD – баландлик бўлади. Теорема исботланди.

Натижа. **Тўғри бурчакли учбурчакда 30^0ли бурчак қаршисида ётган катет гипотенуза ярмига тенг** (15-, 18-, 19- теоремалардан келиб чиқади).



80-расм



81-расм

20-теорема. (18-теоремага тескари теорема). **Агар учбурчакнинг икки бурчаги тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёнли учбурчак дейилади.**

Исбот. ΔABC берилган (80-расм). $\angle 3 = \angle 4$ бўлсин. $AC=BC$ бўлишини исботлаймиз. CD – биссектрисани ясаймиз, унда $\angle 2 = \angle 1$ бўлади. Натижада ΔACD ва ΔBCD учун ΔADK= ΔBDK бўлади (10, 5-натижа). Бу охирги икки учбурчакда CD умумий томон, унга ёпишган бурчаклар тенг. Унда $\Delta ACD = \Delta BCD$ (учбурчаклар тенглигининг 2-аломатига асосланган). Бундан $AC=BC$. Теорема исбот қилинди.

18-20 - теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. **Учбурчакда тенг томонларнинг қаршисида тенг бурчаклар ва тенг бурчаклар қаршисида тенг томонлар ётади.**

21-теорема (Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати). Агар бир учбурчакнинг уч томони иккинчи учбурчакнинг уч томонига мос равишда тенг бўлса, унда у учбурчаклар тенг бўлади.

Исбот. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклари берилсин. $AB=A'B$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$ бўлсин (81-расм). $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ эканлигини исбот қиламиз. $A'B'$ тўғри чизиққа нисбатан C' нуқта ётмаган ярим текисликда $A'B'$ нурдан бошлаб $\angle BAC=\Delta A'B'C'$ тенглик бажариладиган қилиб $A'E$ нурни ясаймиз (81-расм). Сўнг $A'E$ нурга $A'C_1=AC=A'C'$ бўладиган қилиб $A'C_1$ кесмани ўлчаб қўйиш мумкин. Унда учбурчаклар тенглигининг асосида $\Delta ABC=\Delta A'B'C_1$ (1) бўлади.

Бундан $BC=B'C_1=B'C'$ ва $\angle ACB=\angle A'C_1B'$ э канлиги келиб чиқади. C' ва C_1 нуқталар $A'B'$ тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади. Шунинг учун $C'C_1$ кесма $A'B'$ тўғри чизиқ билан кесишади (II_3 аксиомаси). Уларнинг кесишишини D нуқта орқали белгилайлик.

ABC учбурчакнинг берилишга кўра D нуқта AB кесмада ёки унинг давомида ётиши ёки B нуқта билан устма-уст тушиши мумкин.

D нуқта $A'B'$ кесмада ётсин (81-расм) $A'C'C_1$ ва $B'C'C_1$ учбурчаклар тенг учбурчаклар бўлганлиги сабабли, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ бўлади (18-теорема). Бундан $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ ёки $\angle A'C'B'=\angle A'C_1B'$ эканлиги аниқ. Демак, учбурчаклар тенглигининг 1-аломати асосида $\Delta A'B'C'=\Delta A'B'C_1$ (2) бўлади (1) ва (2) тенгликлардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ эканлиги келиб чиқади.

D нуқта $A'B'$ кесманинг давомида ётсин (82-расм). Юқоридаги белгилашларни ва тушунчаларни қўлланамиз $\angle A'C'D=\angle 1$; $\angle A'C_1D=\angle 2$; $\angle B'C'D=\angle 3$, $\angle B'C_1D=\angle 4$. Бунда $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ бўлиши тшунарли. B' нуқта A' ва D нуқталар орасида ётганлиги сабабли, $C'B'$ нур $\angle 1$нинг ичида, C_1B' нур ҳам $\angle 1$ ичида ётади. Шунинг учун $\angle A'C'B'=\angle 1-\angle 3$, $\angle A'C_1B'=\angle 2-\angle 4$ бўлади. Бу икки тенгликдан $\angle A'C'B'=\angle A'C_1B'$ деб олиш мумкин.

Энди учбурчакларнинг тенглигининг 1–аломатидан фойдалансак $\Delta A'B'C'=\Delta A'B'C$ (3) бўлади (1) ва (3) тенгликлардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлиши келиб чиқади. Агарда D нуқта B' нуқтасига мос келса(чизмани ўзингиз чизинг), унда теоремани исбот қилиш анча қулай бўлади. Бу ҳолда $\Delta A'B'C_1=\Delta A'B'C_1$ (4) бўлиши дарҳол келиб чиқади. (1) ва (4) тенгликлардан $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлади.

Демак, учала ҳолда ҳам $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

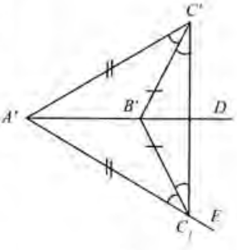
Тенг ёнли учбурчакка боғлиқ қуйидаги масалаларнинг ечилишини кўриб чиқамиз.

Масала: Асоси AB бўлган тенг ёнли ABC учбурчаги AD кесма билан ACD ва ABD иккита тенг ёнли учбурчакка бўлинган. ABC учбурчакнинг бурчакларини топинг.

Ечиш: Масала шартидан қуйидагиларга эгамиз:

ABC - тенг ёнли учбурчак, AB - асоси.

AD кесма ABC учбурчакни тенг ёнли иккита учбурчакка бўлади. (82^a -расм) A,B,C - бурчакларни топиш талаб қилинади.



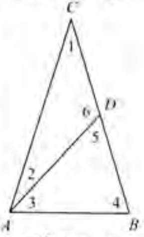
82-расм

Тенг ёнли учбурчакнинг хоссасига асосан $AC=BC$; $\angle A=\angle B$.

Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремага асосан $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$.

Масалани ечишдан олдин қуйидаги қизиқ саволга жавоб берайлик: бизга ΔACD ва ΔABD тенг ёнли учбурчаклар эканлиги маълум, бироқ ўша учбурчаклар томонларининг қайси бири асоси бўлишини биз билмаймиз.

Шундай қилиб, қуйидагидек комбинаторикага доир ўзгача бир масала келиб чиқади: қайси холларда ΔACD ва ΔABD учбурчакларнинг иккаласи ҳам бир вақтни ўзида тенг ёнли бўла олишади? Бу ҳолатни ўрганишда қуйидаги стратегия бўйича ҳаракат қилишга тўғри келади. Тенг ёнли ΔACD ва ΔABD учбурчакларнинг қайси бир томонлари уларнинг асослари бўла олишини аниқлаш керак.



82^a-расм.

АB томони ABD тенг ёнли учбурчакнинг асоси бўла оладими? Йўқ бўла олмайди, чунки $\angle DAB<\angle CAB=\angle B$. Демак, унинг асоси AD ва BD томонларигина бўла олиши мумкин.

AD томони ADC тенг ёнли учбурчакнинг асоси бўла оладими? Йўқ бўла олмайди, чунки $CD<BC=AC$ Демак, бу учбурчакнинг асоси AC ва CD томонларигина бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги тўрт ҳол бўлиши эҳтимол:

1) $AB=BD$ *ва* $AC=AD$ *(у ҳолда асослари* AD *ва* CD*)*

2) *AB=BD ва AD=CD (у ҳолда асослари AD ва AC)*
3) *AB=AD ва AD=CD (у ҳолда асослари BD ва AC)*
4) *AB=AD ва AD=AC (у ҳолда асослари BD ва CD)*

Вақт кўп талаб қилинсада бу ҳолларни барчасини кўриб чиқиб, натижаларни текшириб кўришга тўғри келади.

Текшириш ишини давом эттириб биз: ё ABC учбурчакнинг бурчакларини топиб оламиз, ёки биз қараётган ҳол мумкин эмаслигини исбот қиламиз.

Масалан, 1 - ҳолни кўриб чиқайлик:

$$\left.\begin{aligned} &\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180^0, \\ &\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Учбурчакнинг ташқи бурчаклари хоссаси ҳақидаги теоремага асосан

$$\left.\begin{aligned} &\angle 6 = \angle 3 + \angle 4 \\ &\angle 5 = \angle 2 + \angle 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

1 -ҳолдаги таҳмин бўйича

$$\left.\begin{aligned} &AB = BD \text{ ва } AC = AD \\ &\angle 3 = \angle 5 \text{ ва } \angle 6 = \angle 1. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Бундаги (2) ва (3) ҳоссалар ўзгача чунки бу тўғрими ёки йўқми уни биз аниқ билмаймиз. (3) дан

$$\angle 5 + \angle 6 = \angle 1 + \angle 3 \qquad (4)$$

(2) дан

$$\angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 \qquad (5)$$

(4) ва (5) тенгликлар бир-бирига қарама-қарши, демак (3) даги тенгликлар ўрин олиши мумкин эмас, бошқача айтганда 1-ҳол мумкин эмас.

Шунга ўхшаш 4-ҳолатни ҳам мумкин эмаслигини кўрсатиш мумкин. 2 - ва 3-холларни қараб чиқишда ҳам худди шундай иш олиб бориш керак.

Натижада 2-ҳолда жавоб қатори

$\angle A = \angle B = \dfrac{540^0}{7}$; $\angle C = \dfrac{180^0}{7}$ га, 3-ҳолда

$\angle A = \angle B = 72^0$, $\angle C = 36^0$ га тенглигига эга бўламиз.

МАШҚЛАР

1. Учбурчак томонлари: 1) 4 см, 6 см, 7 см, 2) 6 см, 9 см, 0,6 дм; 3) 5 м, 5 м, 5 м; 4) 1,2м, 7дм, 12 дм. Қайси ҳолда: а) тенг ёнли; б) тенг томонли; в) турли томонли учбурчак бўлади?

2. 1-масалада берилган ҳар бир учбурчакнинг периметрини топинг. Қайси ҳолда ҳисоблаш осон бўлишини кўрсатинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг: а) ён томони 8 см, асоси 10 см; б) ён томони 5м, асоси 7 м бўлса, унинг периметрини топинг.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 20,6 дм. Агар: а) асоси 6дм бўлса. ён томонини топинг; б) ён томони 53 см бўлса, асосини; в) асоси ён томонидан 2,6дмга узун бўлса, томонларини; г) асоси ён томонидан 7,9дмга кам бўлса, унинг томонларини топинг.

5. Тенг томонли учбурчакнинг томони 6,2 см бўлса, унинг периметрини топинг.

6. Тенг томонли учбурчакнинг периметри 32,4 дм бўлса, шу учбурчакнинг томонини топинг.

7. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонларининг бирига ўтказилган медиана унинг периметрини 18 дм ва 8дм узунликдаги бўлакларга бўлади. Учбурчакнинг томонларини топинг.

8. Учбурчакнинг бир томони унинг ярим периметридан кичик бўлишини исботланг.

9. ABC тенг ёнли учбурчакнинг периметри 60 дм, BD - унинг асосига туширилган баландлик. Агар ABD учбурчакнинг периметри 46дм бўлса, BD ни топинг.

10. 9-масаладаги учбурчакнинг В учидан ўтказилган медианаси, биссектрисаси нимага тенг?

11. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 75^0, унинг асосидаги бурчакларини топинг.

12. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаги $49^0\ 30'$ бўлса, унинг учидаги бурчагини топинг.

13. Тенг томонли учбурчакнинг ҳар бир бурчаги 60^0га тенг бўлишини исботланг.

14. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 80^0. Ён томонига туширилган баландлик билан асоси орасидаги бурчагини топинг.

15. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаги 50^0. Бир ён томони билан унинг иккинчи ён томонига туширилган баландлик орасидаги бурчакни топинг.

16. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги билан ён томонининг орасидаги бурчак унинг асосидаги бурчагидан 15^0 кичик. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

17. ABC тенг томонли учбурчак томонларининг ўрталари бўлган D,E,F нуқталарни кетма-кет туташтирсак, янги учбурчаклар ҳосил бўлади. Исботланг: а) $\Delta ADF=\Delta DBE$.

Яна қандай тенг учбурчаклар ҳосил бўлади? б) $DE \parallel AC$.

Яна қайси томонлари параллел; б) $AE \perp BC$; г) $DE = \frac{1}{2}AC$

18. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги учларидан ўтказилган: а) биссектрисалари; б) медианалари тенг бўлишини исботланг.

19. Агар тенг ёнли учбурчакнинг икки бурчагининг айирмаси 24^0 бўлса, унинг бурчакларини топинг. Икки ҳолни қаранг.

20. Тенг ёнли учбурчакнинг: а) асосидаги бурчаги учидаги бурчагидан: б) учидаги бурчаги асосидаги бурчагидан 4 марта катта бўлса, шу учбурчакнинг бурчакларини топинг.

21. ABC учбурчакда AB=6дм, BC=6дм; CA=9 дм. Унинг: а) қайси бурчаги энг катта? б) қайси бурчаклари тенг?

22. Агар иккита тенг ёнли учбурчакларнинг асослари ва уларга туширилган баландликлари тенг бўлса, унда бу учбурчаклар тенг бўлишини исботланг.

23. Тенг томонли учбурчакларда: а) барча медианалари: б) барча биссектрисалари; в) барча баландликлари ўзаро тенг бўлишини исбот қилинг.

24. Тенг ёнли учбурчакнинг ташқи бурчакларидан бири: 1)116^0; 2) 100^0 бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.

25. Тенг ёнли учбурчак учидаги ташқи бурчагининг биссектрисаси асосига параллел бўлишини исботланг.

13-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАР

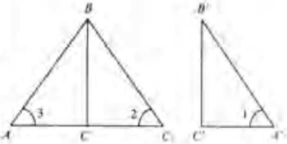
9 § да тўғри бурчакли учбурчакка тушунча берилган. Энди шу учбурчакка тегишли бўлган теоремаларни кўриб чиқамиз. Тўғри бурчакли учбурчаклар қачон тенг бўлади?

22-теорема. **Агар икки тўғри бурчакли учбурчакнинг: 1) мос катетлари тенг бўлса; 2) мос ҳолда бир катети ва унга ёпишган иккита ўткир бурчаклари тенг бўлса; 3) гипотенузалари ва мос равишда уларга ёпишган биттадан ўткир бурчаги тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг.**

Исбот. 1-, 2- ҳолларнинг тўғрилиги учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатидан келиб чиқади. 3-ҳолнинг тўғрилиги 2-аломатидан келиб чиқади. Бунда иккита тўғри бурчакли учбурчакнинг биттадан ўткир бурчаги тенг бўлса, унда иккинчи ўткир бурчаклари ҳам тенг бўлиши маълум (15-теорема, 5-натижа).

23-теорема. **Бир тўғри бурчакли учбурчакнинг катети ва гипотенузаси иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг мос катети ва гипотенузасига тенг бўлса, бу учбурчаклар ўзаро тенг бўлади.**

Исбот. ABC ва $A'B'C'$ тўғри бурчакли учбурчаклар берилиб, $AB=A'B$; $BC=B'C$ бўлсин (83-расм) $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлишини исботланг. CA нурга тўлиқловчи нурни ясаб, унга $CC_1=C'A'$ кесмани ўлчаб қўямиз (3,2). B ва C_1 нуқталарни туташтирамиз.

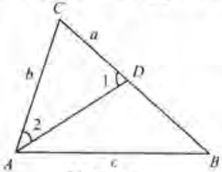


83-расм

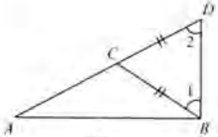
У ҳолда $\Delta C_1BC=\Delta A'B'C'$ бўлади (22-теорема, 1-ҳол). Бундан $C_1B=A'B'=AB$, $\angle 1=\angle 2$ бўлади. Бироқ $C_1B=AB$ бўлганлиги сабабли, ABC_1 учбурчак тенг ёнли. Шунинг учун $\angle 3=\angle 2$ бўлади. У ҳолда $\angle 3=\angle 1$ бўлиб, $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ бўлиши тушунарли (22-теорема, 3-ҳол). Теорема исбот қилинди.

Учбурчакларнинг томонлари ва бурчаклари орасидаги боғланишни кўрсатувчи теоремаларни кўриб чиқамиз.

24-теорема. **Ҳар қандай учбурчакнинг катта томони қаршисида катта бурчаги ётади.**



84-расм



85-расм

Исбот. ΔABC берилиб, $a>b$ бўлсин (84-расм) $\angle A>\angle B$ бўлишини исбот қиламиз. $CB=a$, CB нурда $CD=b$ бўладиган қилиб, D нуқтани белгилаш мумкин (3.1) $a>b$ бўлганлиги сабабли D нуқта CB кесмада ётади. Унда AD нур $\angle A$ нинг ичида ётади, демак, $\angle 2<\angle A$ (1) бўлади.

Ясаш бўйича ΔADC тенг ёнли учбурчак, шунинг учун $\angle 2=\angle 1$ (2); $\angle 1-\Delta ADC$ нинг ташқи бурчаги, $\angle B<\angle 1$ (3) бўлади (15-теорема, 2-натижа) (1), (2), (3)лардан $\angle B<\angle A$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

25-теорема. **Ҳар қандай учбурчакнинг катта бурчаги қаршисида катта томон ётади.**

Теоремани мустақил исбот қилинг. 24-, 25-теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1-натижа. **Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари унинг гипотенузасидан кичик бўлади** (исбот қилинг).

2-натижа. **Нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр шу нуқтага ўтказилган оғмадан кичик бўлади.** Мустақил исбот қилинг.

26-теорема. **Учбурчакнинг бир томони қолган икки томони йиғиндисидан кичик бўлади.**

Исбот. $\triangle ABC$ берилган (85-расм). $AB<AC+BC$ бўлишини исбот қиламиз. (Бу кесмаларни ўлчаш йўли билан юқорида исбот қилинган). AC нурда AC томоннинг давомида C нуқтадан бошлаб $CD=BC$ кесмани ўлчаб қўямиз (3,1) натижада $AD=AC+CD=AC+BC$ (1) бўлади. $\triangle BDC$ - тенг ёнли, унда $\angle 1=\angle 2$ (2). C нуқта A ва D нуқталарнинг орасида ётади, шунинг учун BC нур $\angle ABD$ нинг ичида ётади: $\angle ABD>\angle 1$ (3). (2) тенгликнинг асосида: $\angle 2<\angle ABD$.

Демак, $\triangle ABD$ да: $AB<AD$ бўлади (25-теорема). (1) тенгликдан фойдалансак, $AB<AC+BC$ (4) бўлади. Теорема исбот қилинди.

(4) тенгсизлик ихтиёрий учбурчакнинг томонлари учун тўғри бўлиши тушунарли.

Натижа: **Ҳар қандай учбурчакнинг бир томони қолган икки томони айирмасидан катта бўлади.**

$AB>BC$ деб олайлик. Унда $AB<AC+BC$ тенгсизликдан $AC>AB-BC$ бўлиши тушунарли.

МАШҚЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаклари йиғиндисини топинг.
2. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчакларини топинг.
3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги: 1) 18^0; 2) 56^0; бўлса, иккинчи ўткир бурчагини топинг.
4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг битта ўткир бурчаги 45^0.
   а) катетларининг бири 8дм бўлса, иккинчи катетини топинг; б) катетларининг йиғиндиси 28 дм бўлса, ҳар бир катетини топинг; в) гипотенузасини ва унга туширилган баландликнинг йиғиндиси 21дм бўлса, гипотенуза ва баландликни топинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузаси 18м ва бир ўткир бурчаги 30^0. Бу бурчак қаршисида ётган катет қанчага тенг?

6. Тўғри бурчакли учбурчакнинг битта ўткир бурчаги 60^0га тенг. а) Унга ёпишган катети 6,5 см. Гипотенузасини ҳисобланг; б) кичик катети билан гипотенузасининг йиғиндиси 3,6дм. Гипотенузаси ва кичик катети узунликларини топинг.

7. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза ярмига тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчакнинг битта бурчаги 30^0 эканлигини исбот қилинг.

8. ABC- тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ($\angle C=90^0$). AB,BC ва CA томонларнинг ўрталари мос ҳолда D,E,F ҳарфлари билан белгиланган. DC, DE, DF кесмалар ўтказилган. 1) Нечта учбурчак ҳосил бўлди? 2) Ҳосил бўлган учбурчакларнинг бурчакларини топинг. 3) Д нуқта берилган учбурчакнинг учларидан бир хил масофада бўлишини исботланг.

9. ABCучбурчакда BDмедиана ACтомоннинг ярмига тенг. В бурчакни топинг.

10. Учбурчак бурчакларининг нисбати 1,2 ва 3 сонларининг нисбатига тенг. Шу учбурчак тўғри бурчакли учбурчак эканлигини исбот қилинг.

11. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчакларининг биссектрисалари орасидаги бурчак 45^0 бўлишини исбот қилинг.

12. 22-теореманинг ҳар бир бўлимини исботланг.

13. Берилган кесмани тенг иккига бўлиб, унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси кесма учларидан бир хил узоқликда бўлишини исботланг.

14. Агар учбурчакнинг: а) медианаси баландлик бўлиб ҳисобланса; б) баландлиги биссектрисаси ҳам бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг ёнли учбурчак бўлишини исбот қилинг.

15. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонларига туширилган баландликлар тенг бўлишини исбот қилинг.

16. Агар учбурчакларнинг иккита баландлиги тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.

17. Тенг томонли учбурчакка иккита медиана ўтказилган. Улар орасидаги ўткир бурчакни топинг.

18. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчакларидан бири 50^0. Тўғри бурчакнинг биссектрисаси билан учбурчак гипотенузаси орасидаги ўткир бурчакни топинг.

19. ΔABCда $AB=BC$, $BO \perp AC$. а) Перпендикуляр ва оғмаларни белгиланг; б) агар D ва Е нуқталари ACтомонда ётиб, $BD=BE$ бўлса, $\Delta ABD = \Delta CBE$, $\Delta ODB = \Delta OBE$ бўлишини исботланг.

20. Тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқтадан бир-бирига тенг бўлган икки оғма ўтказилган. Уларнинг асослари орасидаги масофа 12,4 дм. Оғмаларнинг тўғри чизиқдаги проекцияларини топинг.

21. ΔABC-тенг ёнли учбурчак. AC кесмада D ва E нуқталари $AD=CE$ тенглик бажариладиган қилиб олинса, DBE қандай учбурчак бўлади?

22. KLM учбурчакда KM=24,8 дм, $\angle M=30^0$. Қуйидагиларни топинг: 1) K нуқтадан LM тўғри чизиққача бўлган масофа; 2) KM оғманинг KL тўғри чизиқдаги проекциясини.

23. DEF учбурчакда $\angle D=\angle F=45^0$ ва $DF=16,4$ *м* бўлса, қуйидагиларни топинг: 1) E нуқтадан DF тўғри чизиққача бўлган масофани; 2) DE томонидан DF тўғри чизиққа туширилган проекциясини.

24. Параллел икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб ўтиб, 30^0ли бурчак ҳосил қилади ва бу параллел тўғри чизиқлар орасидаги кесманинг узунлиги 17,6дм бўлса, параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

25. ABC тенг ёнли учбурчакда AB ён томони 16,4дм, шу томоннинг қоқ ўртасидаги D нуқтага перпендикуляр ўтказилган. Бу перпендикуляр BC томонини E нуқтада кесиб ўтади. ΔAEC нинг периметри 26,9 дм бўлса, AC томонини топинг.

26. Бурчак биссектрисасига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ бу бурчак томонларини учидан бошлаб тенг кесмаларга бўлиб кесиб ўтишини исботланг.

14-§. АЙЛАНАГА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН БУРЧАКЛАР

$\omega(O,r)$ айлана берилган бўлсин (86-расм). Айланада ихтиёрий A нуқтани белгилаб, шу нуқта орқали AB, AC кесувчиларни ўтказсак, BAC бурчакка эга бўламиз.

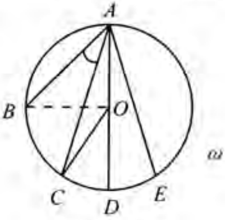
Учи берилган айланада ётиб, томонлари шу айланани кесиб ўтувчи бурчакни айланага **ички чизилган бурчак** деб атаймиз. $\angle BAC$- ички чизилган бурчак бўлади. Айланага ички чизилган бурчакни қисқача «ички чизилган бурчак» деб аташ қабул қилинган.

BAC бурчакнинг B ва C нуқталари айланани икки ёйга бўлади. Ички чизилган бурчакнинг ичида ётган ёй ($\overset{\frown}{BC}$), шу бурчак ёйи ёки шу бурчакка тўғри келувчи (тиралган) ёй қаторида қабул қилинади. Айлананинг ёйи унга тўғри келувчи марказий бурчак орқали ўлчаниши маълум (4,5). Демак, ички чизилган бурчакни унга мос келувчи ёй ёки марказий бурчак орқали ўлчаш мумкин.

27-теорема. **Айланага ички чизилган бурчак ўзи тиралиб турган ёйнинг ярми билан ўлчанади.**

Исбот. $\omega(O,r)$ айланага ички чизилган бурчакларни қараб чиқайлик (86-расм). Уч хил ҳол бўлиши мумкин.

1. Ички чизилган бурчакнинг бир томони айлананинг O маркази орқали ўтади. CAD ички чизилган бурчакни кўриб чиқайлик. Бу бурчак CD ёйнинг ярми орқали ўлчанишини кўрсатамиз. C ва O нуқталарни туташтирамиз. ΔAOC – тенг ёнли $(OA=OC)$; $\angle OAC=\angle OCA$; $\angle COD$ бу учбурчакнинг ташқи бурчаги. У ҳолда $\angle COD=2\angle CAD$ (15-теорема; 1-натижа). $\angle COD=\breve{CD}$



86-расм

(§ 4.5) ёки $\angle CAD=\dfrac{\breve{CD}}{2}$ бўлади. Бу ҳол учун теорема исбот қилинди.

2. O марказ ички чизилган бурчак ичида ётади. CAE ички чизилган бурчакни кўриб чиқамиз. O марказ орқали AD диаметрини чизамиз. O нуқта $\angle CAE$ нинг ичида ётганлиги сабабли, OA нур шу бурчакнинг ичида ётади, унда $\angle CAD+\angle DAE=\angle CAE$ (1) бўлади. Шу билан бирга $\breve{CD}+\breve{DE}=\breve{CE}$ (2) бўлиши маълум (4.5).

1 - ҳолнинг асосида $\angle CAD=0{,}5\breve{CD}$; $\angle DAE=0{,}5\breve{DE}$, (1) ва (2) тенглигидан $\angle CAE=0{,}5\ CE$ бўлади. Демак, бу ҳол учун ҳам теорема исбот қилинди.

3. O марказ ички чизилган бурчакнинг ташқарисида ётади. BAC- ички чизилган бурчакни кўриб чиқамиз. Исботи 2-ҳолдаги каби бўлади (исботни мустақил бажаринг). Бунда ҳам $\angle BAC=0{,}5\,BC$ бўлади. Шундай қилиб, теорема тўлиқ исботланди.

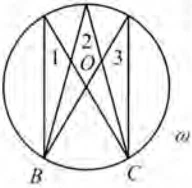
Бу теоремани: «Ички чизилган бурчак унинг ёйига тўғри келувчи марказий бурчакнинг ярмига тенг», деб айтиш мумкин.

1-натижа. **Айлананинг диаметрига тиралган бурчак тўғри бурчак бўлади.**

Бу бурчак ярим айланага тўғри келувчи ёйнинг ярми билан ўлчанади (27- теорема). Бу ёйнинг катталиги 90^0га тенг. Демак, диаметрга тиралган бурчак 90^0 бўлади.

2-натижа: **Битта ёйга тиралган, учлари ёйнинг учлари орқали ўтувчи тўғри чизиқдан бир томонда ётувчи ички чизилган бурчаклар тенг бўлади**. 87-расмда берилган $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ бурчакларнинг ҳар бири *BC* ёйнинг ярми билан ўлчанади (27-теорема). Шунинг учун $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ бўлади.

Бурчакнинг учи айлана ичида (ташқарисида) ётиб, томонлари айланани кесиб ўтувчи бурчакларни ҳам ўзларига мос ёй билан ўлчаш мумкин. Уларни ўлчаш ички чизилган ёйларни ўлчашга асосланган. Уларни исботлашга тўхталиб ўтмадик. Бундай бурчакларнинг катталиклари қандай ўлчаниши қуйидаги теоремаларда кўрсатилган.



87-расм

28-теорема. **Айлана ичида кесишувчи икки кесувчи орқали ҳосил бўлган бурчак унинг томонлари ва шу томонларнинг давомлари билан чегараланган ёйлар йиғиндисининг ярмига тенг.**

29-теорема. **Айлана ташқарисида кесишувчи икки кесувчи орқали ҳосил бўлган бурчак унинг томонлари орасида ётган ёйлар айирмасининг ярмига тенг.**

МАШҚЛАР

1. Маркази *O* нуқта бўлган айланага $AB \perp CD$ диаметрлари ўтказилган. а) *BOD* марказий бурчакни; б) *BAD* ички чизилган бурчакларни ҳисобланг.

2. Ярим айланага мос келувчи: а) марказий бурчакни; б) ички чизилган бурчакни ҳисобланг. Чизмада кўрсатинг.

3. Маркази *O* нуқтада бўлган айлана *A*,*B*,*C* нуқталар орқали 3та тенг бўлакка бўлинади. *AOB* марказий бурчакни ва *ABC* ички чизилган бурчакларни ҳисобланг. Шу айлана *D*,*E*,*F*,*K*,*L* нуқталар орқали 5та тенг бўлакка бўлинган. *DOE* марказий бурчакни ва *DKE* ички чизилган бурчакларни ҳисобланг.

4. Айлананинг *BC* ёйи 38^0га тенг. Бу айлананинг *A* нуқтаси орқали *AB* ва *AC* кесувчилари ўтказилган. *BAC* ички чизилган бурчак катталигини топинг.

5. Агар *KLM* ички чизилган бурчак 70^0 бўлса, *KM* ёйнинг катталигини, яъни шу ёйга мос келувчи марказий бурчакни топинг.

6. Марказий бурчак унинг ёйига тиралган ички чизилган бурчакдан 40^0га катта. Ҳар бир бурчак катталигини топинг.

7. AB ватар айланани икки ёйга бўлади. Агар шу ёйлар катталикларининг нисбати а)7:11; б) 1:9 га тенг бўлса, AB ватар айлана нуқтасидан қандай бурчак остида кўринади?

8. 3-масаладаги берилган бурчаклар $\angle DLE=\angle DKE=\angle DFE$ бўлишини исботланг. Ҳар бир бурчак катталигини топинг.

9. Айланага ички чизилган ABC бурчак 30^0. Агар айлана диаметри 15дм бўлса, ACватарнинг узунлигини ҳисобланг.

10. $\angle ABC$ - айланага ички чизилган бурчак, AC ватар айлана радиусига тенг. $\angle ABC$ни топинг. Икки ҳолни кўриб чиқинг.

11. Агар ватар билан унинг учидан ўтказилган радиус 40^0, бурчак ҳосил қилса, шу ватарга тиралган ёй узунлигини топинг.

12. Айлана ёйи 120^0. Ёйнинг ватари билан унинг учидан ўтказилган радиус орасидаги бурчакни ҳисобланг.

13. Айлана A,B,C,D нуқта орқали 4 бўлакка бўлинади. $\breve{AB}=75^0;\breve{DC}=48^0;\breve{CD}=145^0;\breve{DA}=92^0$ ва DB ватарлари E нуқтада кесишади. AEBва BECбурчакларни топинг.

14. Айлана K,L,M,Nнуқта орқали $\breve{KL}:\breve{LM}:\breve{MN}:\breve{NK}=3:2:4:7$ нисбатда бўлакларга бўлинади. KM ваLN ватарлар D нуқтада кесишади. LDMбурчакни топинг.

15. 14-масалаги LN ва NM тўғри чизиқлар айлананинг ташқарисида ётган Fнуқтада кесишади (чизмада текшириб кўринг). KFNбурчакни топинг.

Кўрсатма. Айлана ташқарисида кесишувчи икки кесувчидан ҳосил бўлган бурчак унинг томонлари орасида ётган ёйлар айирмасининг ярми орқали ўлчанишидан фойдаланинг.

16. Айлананинг AB диаметрни CD ватар M нуқтада кесиб ўтади. $\angle CMB=73^0$, $\breve{BC}=110^0$ бўлса. BDёйнинг катталигини топинг.

17. EDватарнинг ёйи $\breve{ED}=40^0$. Eуриниш нуқтаси орқали EM уринма ўтказилган бўлса, DEMбурчакни ҳисобланг.

18. Айлананинг ёйи $\breve{AB}=190^0 30'$. A ва B нуқталар орқали ўтказилган уринмалар C нуқтада кесишади. Уринмалар қандай бурчак ҳосил қилади?

19. Айлананинг радиусига тенг бўлган ватари унинг учидан ўтказилган уринма билан қандай бурчак ҳосил қилади?

20. 19-масалада ватарнинг учлари орқали айланага ўтказилган уринмалар орасидаги бурчагини топинг.

21. Ватар айланани 11:16 нисбатда бўлади. Ватарнинг учлари орқали ўтказилган уринмаларнинг орасидаги бурчакни топинг.

22. Айлана 3:5:7 нисбатда уч бўлакка бўлинган. Бўлиш нуқталари орқали ўтказилган уринмалар учбурчак ҳосил қилади. Шу учбурчак бурчакларини топинг.

15-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН АЙЛАНАНИНГ ВА ИККИ АЙЛАНАНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАНИШИ

а) Тўғри чизиқ билан айлананинг ўзаро жойланиши.

ℓ тўғри чизиқ $\omega(O,r)$ айлананинг A ва B нуқталарда кесиб ўтсин (88-расм) AB кесма айлананинг ватари бўлади.

30-теорема. **Айлана ватарини тенг иккига бўлувчи диаметр шу ватарга перпендикуляр бўлади.**

Исбот. CD диаметр AB ватарни E нуқтада тенг иккига бўлсин: $AE=EB$. $\Delta OAE=\Delta OBE$ (учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати). Унда $\angle OEA=\angle OEB=90^0$ бўлади. Демак, $OE\perp AB$ ёки $CD\perp AB$. Теорема исбот қилинди.

31-теорема. (30-теоремага тескари теорема). **Агар айлананинг диаметри ватарга перпендикуляр бўлса, у ҳолда диаметр ватарни тенг иккига бўлади.**

Бу теоремани мустақил исбот қилинг.

ОЕ кесманинг узунлиги айлананинг O марказидан AB ватарига ёки ℓ тўғри чизиққача бўлган масофани ифодалайди. $d=OE$ деб белгилайлик. ΔAOE да $OE<r$ ёки $d<r$.

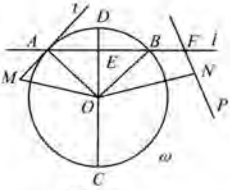
1-натижа. **Айлананинг марказидан уни кесиб ўтувчи тўғри чизиққача бўлган масофа айлана радиусидан кичик бўлса, бу тўғри чизиқ айланани икки нуқтада кесиб ўтади.**

2-натижа. **Айлана марказидан бир хил узоқликдаги ватарлар тенг бўлади.**

Тўғри бурчакли учбурчак-ларнинг тенглик аломатларидан фойдаланиб, юқоридаги натижаларнинг тўғрилигини осонгина исбот қилиш мумкин.

32-теорема. **Айлананинг уриниш нуқтаси орқали ўтувчи уринма шу нуқтага ўтказилган радиусга перпендикуляр бўлади.**

Исбот. 88-расмдан фойдаланамиз. Айлананинг A нуқтаси орқали ўтувчи уринма t тўғри чизиқ бўлсин. $OA\perp t$ бўлишини исбот қиламиз. $OA=r$ эканлиги маълум. Айлана уринмасининг таърифига кўра, t уринма ω айлана билан фақат битта умумий нуқтага эга (А уриниш нуқтаси). t тўғри чизиқнинг A нуқтасидан бошқа барча нуқталари айлананинг ташқарисида ётади. Бошқача айтганда, t уринмада ётган ҳар қандай M нуқта (А нуқтадан бошқалари) учун $OM>r$ бўлади. Унда $OA=r$ – O марказдан t тўғри чизиққача (уринмагача) бўлган масофа бўлади. Демак, $OA\perp t$, теорема исбот қилинди.



88-расм

1-натижа. **Айлана марказидан тўғри чизиққача бўлган масофа айлана радиусига тенг бўлса, тўғри чизиқ айланага уриниб ўтади.**

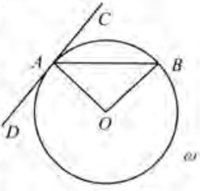
Бу 32-теоремадан келиб чиқади.

2-натижа. **Айлананинг марказидан тўғри чизиққача бўлган масофа айлана радиусидан катта бўлса, унда тўғри чизиқ билан айлана кесишмайди.**

Ҳақиқатдан ҳам, 88-расмдан айлананинг O марказидан p тўғри чизиққача бўлган ON масофа r радиусдан катта ($d=ON>r$) ,бўлса, унда p тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси O марказдан радиусдан катта бўлган узоқликда ётади. Демак, p тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси айлана ташқарисида ётади, яъни айлана билан p тўғри чизиқ кесишмайди.

Хулоса. Агар берилган айлананинг O марказидан тўғри чизиққача бўлган масофа айлана радиусидан кичик (катта) бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ айланани икки нуқтада кесиб (кесмай, уриниб) ўтади.

33-теорема. **Айлананинг уриниш нуқтасидан ўтказилган уринма билан ватар орасидаги бурчак бу ватар орқали аниқланувчи ёйнинг ярмига тенг.**



89-расм

Исбот: $\omega(O,r)$ айлана, AB ватар ва A нуқта орқали ўтувчи DC уринма берилган бўлсин (89-расм). AB ватарга тўғри келувчи ёйлар марказий икки бурчакни ҳосил қилади. Уларнинг бири иккинчисини 360^0гача тўлиқлайди. Аввал уларнинг кичигига тўғри келувчи бурчакни кўриб чиқайлик. Бу ҳолда уринма билан ватарнинг орасидаги бурчак BAC бўлади. Бу бурчак AB тўғри чизиққа нисбатан AC нур ва AB ёй ётган ярим текисликда аниқланади.

$\angle BAC = \frac{\breve{AB}}{2}$ бўлишини исбот қиламиз. $\angle AOB = \breve{AB}$ ва $OA \perp DC$ (32-теорема) эканлиги маълум.

Унда $\angle BAC = 90^0 - \angle OAB$ (1)
бўлади. ΔOAB - тенг ёнли.

Унда

$$2 \cdot \angle OAB + \angle AOB = 180^0 \text{ ёки } \angle OAB = \frac{180^0 - \angle AOB}{2} \quad (2)$$

бўлиши тушунарли. (1), (2) формулалардан

$$\angle BAC = \frac{\angle AOB}{2} \text{ ёки } \angle BAC = \frac{\breve{AB}}{2} \text{ бўлади.}$$

Қўшни бурчаклар бўлганлиги сабабли,

$\angle BAD = \angle 180^0 - \angle BAC = 180^0 - \frac{\breve{AB}}{2}$ бўлиб қолади. Бу тўлдирувчи марказий бурчакнинг ёки тўлдирувчи ёйнинг ярми бўлиб ҳисобланади. Демак, иккала ҳолда ҳам уринма билан ватар (уриниш нуқтасидан ўтказилган) орасидаги бурчак мос ёйнинг ярми билан ўлчанади.

Икки айлананинг ўзаро жойланишини кўриб чиқамиз.

$\omega(O,r)$ ва $\omega'(O',r')$ айланалар берилсин. Марказлари орасидаги масофа d бўлсин: $d=OO'$. Аниқроқ бўлиши учун $R \geq R'$ деб олайлик.

Икки айлананинг ўзаро жойланиши уларнинг марказлари орасидаги масофага боғлиқ. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1) Агар $R+R' < d < R-R'$ бўлса, у ҳолда айланалар кесишмайди.

2) $R+R' = d$ ёки $R-R' = d$, бўлса, у ҳолда бу айланалар марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётган умумий нуқтага эга бўлади (уринади).

3) Агар $R+R' = d$ ёки $d > R-R'$ бўлса, улар икки нуқтада кесишади.

Бу тасдиқларнинг исботланиши сизлар учун ҳозирча анча мураккаб, шунинг учун уларга тўхталиб ўтмаймиз.

МАШҚЛАР

1. $\omega(O;r)$ айлана берилган. Уни: 1) OA тўғри чизиқ 2) OB нур; 3) OD кесма нечта нуқтада кесиб ўтади?
2. 1) Айланадан ташқарида; 2) айланада; 3) айлана ичида ётган нуқтадан шу айланага нечта уринма ўтади?
3. $\omega(O;r)$ айланага A нуқтадан AB ва AC уринмалари ўтказилган. B,C – уринма нуқталари. $AB=AC$ бўлишини исботланг.
4. $\omega(O;4см), \omega(0;5см)$ айланалари берилган. $OO_1=6см$. Айланалар умумий нуқтага эга бўладими?
5. Радиусга тенг бўлган ватарнинг учлари орқали ўтказилган уринмалар қандай бурчакни ташкил қилади?
6. Радиуслари 4 дм ва 5 дм бўлган айланалар уриниб ўтади. Ички ва ташқи уринган ҳолларда уларнинг марказлари орасидаги масофани топинг.
7. Радиуси 1,5 дм бўлган айланадан ташқарида ётган нуқтадан айланага бир-бирига перпендикуляр бўлган икки уринма ўтказилган. Ҳар бир уринманинг узунлигини топинг.
8. Тўғри бурчакка айлана ички чизилган: уриниш нуқталарини туташтирувчи ватар 40 см. Айлана марказидан ватаргача оралиқни ҳисобланг.
9. Агар 1) $d=1$ дм; $R=0,8$ дм; $R'=0,2$ дм; 2) $d=40$см; $R=110$см, $R'=70$ см; 3) $d=12$ см; $R=5$ дм; $R'=3$ см бўлса унда $\omega(O;R)$ ва $\omega'(O',R')$ айланалар қандай жойлашган?
10. $\omega(O;r), \omega_1(O_1;R_1)$ ва $\omega_2(O_2;r_2)$ айланалар икки-иккидан бир-бирига уриниб ўтади. OO_1O_2 учбурчакнинг периметрини топинг.

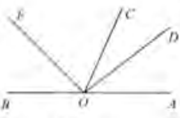
III БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Учбурчакка таъриф беринг. Унинг қандай элементларини биласиз?
2. Учбурчакнинг медианаси, биссектрисаси, баландлиги қандай аниқланади?
3. Учбурчакнинг: а) томонларига; б) бурчакларига нисбатан қандай турлари бор?
4. Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисини аниқланг.
5. Учбурчакнинг иккита ички бурчаги тўғри (ўтмас) бўлиши мумкинми? Нима учун?
6. Учбурчаклар тенглигининг қандай аломатларини биласиз?

7. Тенг ёнли учбурчакнинг хоссаларини айтиб беринг.
8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг қандай хоссалари бор?
9. Икки тўғри бурчакли учбурчакнинг тенглик аломатларини айтиб беринг.
10. Учбурчакнинг томони билан бурчаги қандай боғланган?
11. Айланага ички чизилган бурчак қандай ўлчанади?
12. Диаметрга тиралган бурчак неча градусга тенг? Нима учун?
13. Тўғри чизиқнинг айланани кесиб (уриниб) ўтиш шартларини қандай ифодалаш мумкин?
14. Икки айлананинг кесишиш (уриниш) шартларини қандай ифодалаш мумкин?

III БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Учбурчакнинг бир томонининг узунлиги a бўлса, қолган икки томони $b=2a, c=3a$ бўлиши мумкинми?
2. Учбурчакнинг икки томони узунликларининг йиғиндиси 68 дм, учинчи томони ундан 20 дм кичик бўлса, унинг периметрини топинг.
3. Учбурчакнинг бир бурчаги иккинчи бурчагининг $\frac{1}{3}$ қисмини, учинчи бурчаги иккинчи бурчагининг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади. Учбурчак бурчакларини топинг. У қандай учбурчак бўлади?
4. 3-масаладаги учбурчакнинг ҳар бир бурчагининг ташқи бурчагини топинг.
5. Тенг учбурчакларда тенг томонларга ўтказилган медианалари тенг бўлишини исботланг.
6. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчакларнинг биссектрисалари қачон тенг бўлади? Исбот қилинг.
7. Тенг томонли учбурчакнинг ҳар бир бурчагини топинг.
8. Ҳар қандай учбурчакнинг икки бурчагининг йиғиндиси 180^0дан кичик бўлишини исбот қилинг.
9. Параллел тўғри чизиқ орасидаги масофа ўзгармас бўлишини исботланг.
10. Бурчак биссектрисасининг ҳар қандай нуқтаси шу бурчак томонларидан бир хил узоқликда бўлишини исбот қилинг.
11. Кесма учларидан бирдай узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрни қандай фигура бўлади? Уни исбот қилинг.
12. Қўшни бурчакларнинг биссектрисалари перпендикуляр бўлишини исбот қилинг.



90-расм

Исбот. $\angle AOC$, $\angle COB$ – қўшни бурчаклар (90-расм) OD, OE нурлар мос ҳолда бу бурчакларнинг биссектрисалари. Унда $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$, $COE=\frac{1}{2}\angle COB$ бўлиши маълум. Қўшни бурчаклар бўлганлиги сабабли $\angle AOC+\angle COB=\angle AOB=180^0$ бўлади. Натижада $2\angle DOC+2\angle COE=180^0$, $\angle DOC+\angle COE=90^0$, $\angle DOE=90^0$. Бундан $OD\perp OE$ яъни OD, OE биссектрисалар перпендикуляр эканлиги келиб чиқади.

13. Айлананинг параллел ватарлари орасидаги ёйлар тенг бўлишини исбот қилинг.

14. Айлананинг тенг ватарлари айлана марказидан бир хил узоқликда бўлишини исбот қилинг.

15. 32-теоремага тескари теоремани исбот қилинг.

16. Агар $AB=BC+AC$ бўлса, унда A,B,C нуқта бир тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг.

17. Тўғри бурчакли учбурчакда 30^0ли бурчак қаршисида ётган катет гипотенуза ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.

18. $\triangle ABC$да $AB=18$ см, $\angle B=30^0$, $\angle C=90^0$ бўлса: а) A нуқтадан CB тўғри чизиққача бўлган масофани; б) AB оғманинг AC тўғри чизиқдаги проекциясини; в) AC, BC кесмаларининг AB тўғри чизиқдаги проекцияларини топинг.

19. Айлананинг учдан бир қисмига тиралган ички чизилган бурчак катталигини топинг.

20. Ватар орқали бўлинган айлана бўлакларининг бири учта тенг бўлакка, иккинчиси эса бешта тенг бўлакка бўлинган. Ватарнинг бир учи орқали айланага уринма ўтказилган. Шу уринманинг ватар билан ҳосил қилган бир бурчагини топинг.

21. Тенг томонли учбурчакнинг томони ярим айлананинг диаметри бўлиб ҳисобланади. Учбурчакнинг томонлари ярим айлана орқали ва ярим айлана учбурчак томонлари орқали қандай бўлакларга бўлинади?

22. Тенг ёнли учбурчак томонларининг ўрталари иккинчи тенг ёнли учбурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

23. A нуқтадан айланага AB ва AC уринмалар ўтказилган, B,C– уриниш нуқталари, O айлана маркази. $OA>AB$, $OA>AC$ бўлишини исбот қилинг.

25. Уч айлананинг ҳар бири қолган иккисининг марказлари орқали ўтади. Айланаларнинг марказлари қандай учбурчакнинг учлари бўлади?

Конструктив характердаги қуйидаги масаланинг ечилишига тўхталиб ўтамиз.

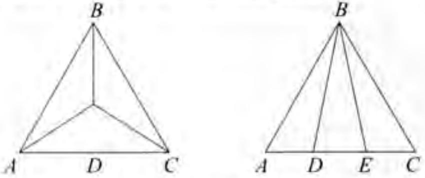
26. Ўзаро бир-бирига тенг бўлган учта учбурчакка бўлинадиган барча учбурчакларни топинг.

Кўрсатма. Аввал учбурчакни учта учбурчакка бўлиш қоидасини кўриб чиқайлик.

Учбурчакни ихтиёрий учта учбурчакка бўлишда ҳеч бўлмаганда битта кесувчи кесма учбурчакнинг учи орқали ўтади. Бу кесма В учи орқали ўтади деб айтайлик, унда у ё B учига қарши ётган AC томоннинг қандайдир бир нуқтасигача етади, ёки ABC учбурчакнинг қандайдир ички D нуқтасигача етиб тўхтайди.

Бунда қуйидаги икки ҳол келиб чиқади.

1. Агар кесувчи AC томонигача етмайди ($90^{а}$ -расм) десак, унда учбурчакни бундан нари бўлиш фақат биргина йўл билан - AD ва CD кесмалари бўйича бажарилади.



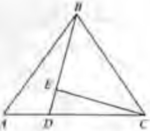
$90^{а}$ -расм

2. Агар кесувчи AC томонининг D нуқтасигача етса, унда ABC учбурчаги ABD ва BCD икки учбурчакка бўлинади ва яна шу икки учбурчакнинг бирини икки учбурчакка бўлиб кесиш керак. Буни учта турли йўл билан бажариш мумкин. ($90^{а, б, в}$ - расм).

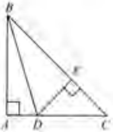
Шундай қилиб, биз турли қийинликдаги тўрт хил ҳолатга эга бўламиз.

$90^{а}$ - расмдаги $\angle ADC > \angle ABD$, чунки АDC бурчак ABD ва BCD учбурчакларининг ташқи бурчакларининг йиғиндисига тенг. Демак ADC бурчак BAD ва ABD бурчакларидан катта. Шунинг учун $\angle BDC = \angle ADB$ худди шунга ўхшаш бу бурчакларнинг ҳар бири ADC бурчакка тенг. бундан ABC учбурчакнинг тенг томонли эканлиги келиб чиқади.

Энди қолган ҳолларни навбат билан қараб чиқамиз. Аввалига «агар тенг икки учбурчакнинг умумий бир ён томони бўлса ва уларнинг асослари мос ҳолда умумий томоннинг турли томонларида бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг ёнли учбурчакнинг «ярим» лари бўлади, ёки тўғри бурчакли учбурчаклар бўлиб ҳисобланади»-деган хулосани эсга олайлик.



$90^{в}$ -расм



$90^{г}$ -расм

Бундай хулосадан қуйидагиларга эга бўламиз.

а) $90^{в}$ -расмда BDA, BDE, DEB ва BEC бурчаклар тўғри бурчаклар, бундай бўлиши мумкин эмас, демак бу йўл билан ҳеч қандай учбурчакни учта тенг учбурчакка бўлиб бўлмайди.

б) $90^{в}$ -расмда BEC ва CED бурчаклар тўғри бурчаклар бўлади. Бироқ унда ADB бурчак ўтмас бурчак, ўз навбатида ўтмас бурчакни учта тўғри бурчакли учбурчакка тенг бўлиши мумкин эмас, шунинг учун бу йўл билан ҳам учбурчакни тенг учта учбурчакка бўлиш мумкин эмас;

в) $90^{в}$ -расмда BED ва CED бурчаклар тўғри бурчаклар бўлади, демак ABD учбурчак тўғри бурчакли ва у учбурчак BDE учбурчакка тенг бўлганлиги сабабли BD кесма унинг гипотенузаси бўлиб ҳисобланади ва BAD бурчак тўғри бурчак бўлади. Ундан ташқари ABD, BDE ва DEC учбурчакларнинг тенглигидан фойдаланиб $\angle ADB = \angle BDE = \angle EDC$ ва уларнинг ҳар бири 60^0 га тенг эканлигига эга бўламиз. Бундан ABC ўткир бурчаги 30^0 бўлган тўғри бурчакли **учбурчакнигина учта тенг учбурчакка бўлиш мумкин.**

Шундай қилиб, тенг томонли учбурчакни ва ўткир бурчаги 300 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнигина тенг учбурчакларга бўлиш мумкин.

IV БОБ. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

16-§. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА. АСБОБЛАР

Геометрия элементларини ўрганишни бошлагандаёқ айрим фигураларни ясаш учун алоҳида қуроллардан фойдаланганимиз маълум. Масалан, тўғри чизиқни, кесмани ва нурни чизиш учун чизғичдан, айланани чизиш учун эса циркулдан фойдаланганмиз. Шунинг учун геометрик ясашларни қуйидагидек ифодалаш мумкин: **геометрик ясашлар** деб, берилган асбоб ёрдамида қандайдир геометрик фигураларни ясашга айтамиз. Геометрик ясашлар орқали олинган фигуралар - нуқта, тўғри чизиқ, кесма, айлана, бурчак, учбурчак ва бошқалар бўлиши мумкин.

Биз қуйида геометрик ясашларни текисликда қараймиз, шунинг учун ясашга берилган ва чизилган фигураларни текисликда ётади, деб ҳисоблаймиз.

Геометрик ясашлар назарий жиҳатдан мутлақ аниқ бажарилади, деб ҳисобланади. Бироқ, баъзи ҳолларда аниқ бажарилмай қолиши ҳам мумкин. У фойдаланилган асбобнинг мукаммал эмаслигига ва ясашни бажаришнинг айрим камчиликларига боғлиқдир.

Геометрик ясашлар, кўпинча масалалар кўринишида берилади. Шунинг учун уларни **ясашга доир масалалар** деб аташ мумкин. Бундай масалаларнинг шартида ва талабида берилган фигуралар ва ясалиши талаб қилинган фигуралар аниқ кўрсатилади. Масалан, «тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айланани чизинг», деган масалада берилган фигура сифатида тўғри тўртбурчак, изланаётган фигура сифатида эса айлана олинади.

Ясашга доир геометрик масала шартини қаноатлантирувчи ҳар қандай фигура шу масаланинг **ечими** бўлиб ҳисобланади. Демак, ясашга доир геометрик масалани ечиш деганда шу масала шартини қаноатлантирувчи фигурани ясашни тушунамиз. Унда юқорида берилган масалада ечим айлана ҳисобланади.

Ясашга берилган геометрик масалаларни ечишга, асосан, қуйидаги **талаблар** қўйилади. Бу талаблар геометрик ясашлар назариясининг асосий талаблари қаторида қабул қилинган.

1. Масалада берилган фигуралар ясалган деб ҳисобланади.

Бу талабнинг маъноси қуйидагича:

Масала шартида берилган фигуралар ясалган деб ҳисобланади, шунинг учун уларни аввалроқ чизиб қўйилади. Масалан, қандайдир бир масала шартида: «икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича учбурчак ясанг» деб берилса, унда икки томони (кесма) ва бурчакни олдин чизиб оламиз. Энди ясаш керак бўлган фигура берилганларга нисбатан кейин ясалади. Демак, ясашга берилган геометрик масалалар шартининг ёзилиши ҳисоблашга ва исботлашга доир геометрик масалалардан мана шуниси билан фарқ қилади.

2. Ясалган фигурада ётувчи ихтиёрий нуқтани ясалган деб ҳисоблаш мумкин.

Чиндан ҳам, масала шартида қандайдир айлана берилган бўлса, яъни ясалган бўлса, у ҳолда бу айланада ихтиёрий нуқтани белгилаш мумкин ва уни ясалган деб қараймиз.

3. Ясалган фигурада ётмаган ихтиёрий нуқталарни ясалган деб олиш мумкин (2-ҳол каби тушунтирилади).

Геометрик ясашларни бажаришда қўлланилувчи асбоблар бўлиб чизғич ва циркуль ҳисобланади.

Уларнинг ҳар бири орқали бажариладиган ясашлар шу асбобларнинг вазифаси сифатида қабул қилинади.

1) **Чизғич ёрдамида** қуйидаги ясашларни бажариш мумкин:

а)берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ ясалади.

Ҳар қандай икки нуқта орқали ўтувчи бир тўғри чизиқнинг мавжудлиги геометриянинг маълум аксиомаси орқали кўрсатилади. Бу берилган (ясалган) икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқни қандай ясаш кераклиги маълум.

Кесма ва нур тўғри чизиқнинг қисмлари бўлиб ҳисоблангани сабабли уларни ҳам қулай усул билан ясаш мумкин.

б) агар икки тўғри чизиқ берилиб, улар кесишадиган бўлса, уларнинг кесишиш нуқталарини ясаш мумкин.

Берилган икки тўғри чизиқ ясалган деб ҳисобланади. Уларнинг кесишишини ясаш учун чизғич ёрдамида тўғри чизиқларни кесишгунча давом эттириш керак.

2. Циркуль ёрдамида қуйидаги ясашларни бажариш мумкин:

а) берилган нуқтани марказ, берилган кесмани радиус қилиб айлана чизиш мумкин;

б) берилган икки айлана кесишадиган бўлса, унда уларнинг кесишиш нуқталарини ясаш мумкин. Бунинг учун айланани а) ҳолдагидай қилиб ясаб, ундан кейин кесишган нуқтасини аниқлаш мумкин.

Шундай қилиб, циркуль ва чизғич ёрдамида юқоридаги асосий ясашларни бажариш мумкин, ундан ташқари: берилган айлана ва тўғри чизиқ кесишадиган бўлса, унда уларнинг кесишган нуқталарини доимо ясаш мумкин.

ЦИРКУЛЬ ВА ЧИЗҒИЧДАН ФОЙДАЛАНИБ, ҚУЙИДАГИ ЭНГ СОДДА ЯСАШЛАРНИ БАЖАРИНГ

1. A ва B нуқталари берилган. а) AB кесмани чизинг; б) AB нурни чизинг; в) AB тўғри чизиқни чизинг (ҳар бир ҳол учун чизмани алоҳида чизинг).

2. a ва b тўғри чизиқларининг кесишиш нуқтасини ясанг.

3. O нуқта ва a кесма берилган. Маркази O нуқтада ва радиуси a га тенг бўлган айлана ясанг.

4. Маркази O, радиуси r бўлган айлана берилган. O маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг берилган айлана билан кесишиш нуқталарини ясанг.

5. a ва b кесмалари берилган. Тўғри чизиқда берилган кесмаларнинг: а) $a+b$ йиғиндисини б) $a-b$ айирмасини ($a>b$ бўлганда) ясанг.

6. a кесма берилган. Ундан 3 марта катта бўлган кесмани ясанг.

7. Тўғри чизиқда $AB=a, BC=b$ кесмалар берилган ($a>b$). Марказлари A ва B нуқталар, радиуслари мос равишда a ва b бўлган айланаларнинг кесишиш нуқталарини ясанг.

8. O нуқта ва a кесма берилган. O нуқтадан a узоқликда ётувчи нуқталарнинг геометрик ўрни (тўплами) қандай фигура бўлади? Чизмада кўрсатинг.

9. AB кесма берилган. A ва B нуқталардан бир хил узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрнини (н.г.ў.) аниқланг ва чизмани ясанг.

10. Бурчак томонларидан бир хил масофада ётган н.г.ў.ни аниқланг ва ясашни бажаринг.

11. ABC бурчак ва унинг ичида ётган D нуқта берилган. Бурчакнинг томонларидан бир хил узоқликда ва D нуқтадан a узоқликда ётган нуқтани ясанг.

12. Берилган a тўғри чизиқдан d узоқликда ётган н.г.ў. a га параллел бўлган икки тўғри чизиқ бўлишини исбот қилинг.

13. а) Кесишувчи; б) параллел икки тўғри чизиқдан бир хил узоқликда ётган н.г.ў. топинг ва уларни ясанг.

14. ABC учбурчак берилган. C бурчакнинг биссектрисасида A ва B учларидан бир хил узоқликда ётган нуқтани топинг.

17-§. ЯСАШГА ДОИР СОДДА МАСАЛАЛАР

Ясашга доир масалаларнинг ҳар бирининг ечилиши ёки бу нуқталарни(масалан, учбурчакнинг учларини ясашга келтирилади; агар бундай нуқталарни ясаш мумкин бўлса, асосан геометрик ўринларнинг кесишишини; икки чизиқ билан кесишиши ёки икки тўғри чизиқнинг кесишишини) топиш керак бўлади. Айланани циркуль, тўғри чизиқни чизғич билан чизилади, демак ясашга доир масалаларни ўша асбоблар (циркуль ва чизғич) ёрдами билан ечамиз. Ясашга доир масалаларни ечишда қўлланиладиган асбоблар ўзгача маънога эга. Масалан:

1. Транспортир ёрдамида икки томони ва улар орасидаги бурчаги 30^0 бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясашни жуда осон бажариш мумкин, худди шу масалани бошқача йўл билан, циркуль ва чизғич ёрдамида ҳам ечиш талаб қилинса, унда масалани ечиш бир қанча қийинлашади, у мунтазам олтибурчакни (ёки мунтазам 12 бурчакни) ясашга боғлиқ.

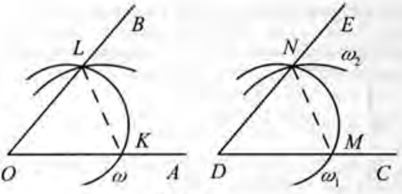
2. Берилган тўғри чизиқнинг берилган нуқтасида 40^0 ўткир бурчакни ясаш масаласи транспортир ёрдамида жуда қулай бажарилса-да, циркул ва чизғич ёрдамида бажариш ҳеч ҳам мумкин эмас.

Циркуль ва чизғич ёрдамида ясашга доир геометрик айрим мураккаб масалаларни ечишда, уларнинг ечилишига ёрдам берувчи бир қатор содда масалаларни ечишга тўғри келади. Уларни ясашга доир содда масалалар деб атаймиз.

1-масала. Берилган бурчакка тенг бурчакни ясанг.

Ечиш: $\angle AOB$ берилган (91-расм). Унга тенг бўлган $\angle CDE$ бурчакни ясаш талаб қилинади. Ихтиёрий r радиус билан $\omega(O,r)$ ёйни чизамиз. Бу ёй AOB бурчакнинг томонларини K,L нуқталарда кесиб ўтади.

DC нурни чизиб, ўша радиус билан $\omega_1(D;r)$ ёйни чизамиз. Бу ёй DC нур бўйича аниқланган тўғри чизиқ орқали бўлинган ярим текисликларнинг бирида $\omega_2(M,KL)$ ёйни чизамиз. Унинг ω_1 ёйи билан кесишиш нуқтаси N нуқта бўлади. DN нурни чизамиз. Натижада $\angle CDE=\angle AOB$ ясалган бўлади.



91-расм

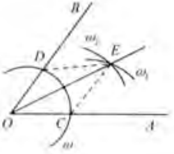
Ҳақиқатан ҳам, ясаш бўйича $\Delta KOL = \Delta MDN$ (мос томонлари тенг). Унда $\angle KOL = \angle MDN$ ёки $\angle AOB = \angle CDE$ изланаётган бурчак бўлади.

2-масала. Берилган бурчак биссектрисасини ясаш.

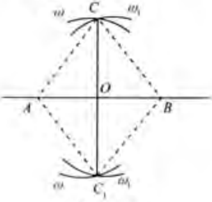
$\angle AOB$ берилган (92-расм). Унинг OE биссектрисасини ясаймиз. Ихтиёрий r радиус бўлган $\omega(O, r)$ ёйни чизамиз. У берилган бурчакнинг томонларини C ва D нуқталарда кесиб ўтади. $\omega_1(C; r)$ ва $\omega_2(D; r)$ ёйларнинг кесишган нуқталарни (O нуқтадан фарқли) E орқали белгилаймиз. OE изланаётган биссектриса бўлади. Чунки $\Delta OCE = \Delta ODE$ (уч томони бўйича) эканлиги маълум. Бундан $\angle COE = \angle DOE$ ёки OE – биссектриса бўлади.

3-масала: Берилган кесмани тенг иккига бўлиш.

AB кесма берилган (93-расм). Уни тенг иккига бўлиш керак. AB тўғри чизиқ текисликни ярим текисликларга бўлади. $\omega_1(A, AB)$ ва $\omega_2(B, AB)$ ярим айланаларни чизамиз, бу ярим айланалар турли ярим текисликларда ётган C ва C_1 нуқталарда кесишади. Шунинг учун CC_1 кесма AB тўғри чизиқни O нуқтада кесиб ўтади.



92 - расм



93 - расм

O нуқта *AB* кесмани тенг иккига бўлади. Чиндан ҳам, ясаш бўйича $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$, бунда $\angle 1 = \angle 2$ бўлади. Энди $\Delta ACO = \Delta BCO$ бўлиши тушунарли (*CO* – умумий томон, $AC=CB$, $\angle 1 = \angle 2$). Натижада $AO=OB$ бўлади. Демак, *O* нуқта *AB* кесмани тенг иккига бўлади.

Натижа. **Кесма учларидан бир хил узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрни бу кесманинг қоқ ўртаси орқали ўтиб, унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни аниқлайди.**

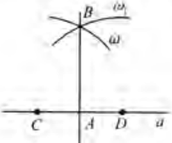
Ҳақиқатан, CC_1 тўғри чизиқнинг (93 – расм) ҳар бир нуқтаси *A* ва *B* нуқтадан бир хил узоқликда ва $\angle AOC = \angle COB = 90^0$.

4-масала: Берилган нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни ясанг.

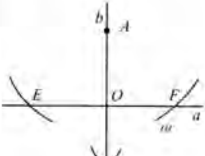
a тўғри чизиқ ва *A* нуқта берилган. *A* нуқта орқали ўтиб, *a* тўғри чизиққа перпендикуляр *b* тўғри чизиқни ўтказамиз. Икки ҳол бўлиши мумкин.

а) *A* нуқта *a* тўғри чизиқда ётади (94-расм). *a* тўғри чизиқда *A* нуқтанинг турли томонларида $CA=AD$ тенглик бажариладиган қилиб *C* ва *D* нуқталарни белгилаймиз. *CA* дан катта бўлган *r* радиус билан $\omega(C;r)$ ва $\omega_1(D;r)$ ёйларни чизиб, кесишиш нуқтасини *B* билан белгилаймиз.

3-масала натижаси асосида *BA* тўғри чизиқ изланувчи *b* перпендикуляри бўлади.



94-расм

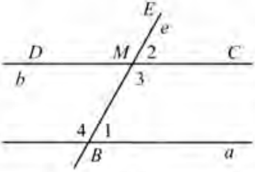


95-расм

б) *A* нуқта *a* тўғри чизиқнинг ташқарисида ётади (95-расм). *a* тўғри чизиқни икки нуқтада (*E* ва *F*) кесиб ўтадиган қилиб, ихтиёрий $\omega(A,r)$ ёйни чизамиз. *a* тўғри чизиққа нисбатан *A* нуқтаси ётмаган ярим текисликда $\omega_1(E,r)$ ва $\omega_2(F,r)$ ёйларнинг кесилиш нуқтасини топамиз, бу нуқта *B* бўлсин. 3-

масала натижаси асосида $AB\perp b$ ёки $b\perp a$ бўлади. b – изланаётган тўғри чизиқ.

5-масала. Берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали ўтувчи, берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқни ясанг.



96-расм

a тўғри чизиқ ва унда ётмаган M нуқта берилган (96-расм). M нуқта орқали ўтиб, $a\|b$ шарт бажариладиган қилиб b тўғри чизиқни ясаймиз. Бундай тўғри чизиқ фақат битта бўлади. (V асосий хосса ёки аксиома асосида). Уни ясашни тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларига асосланиб амалга оширамиз. Бунинг учун M нуқта орқали ихтиёрий ℓ тўғри чизиқни ўтказамиз. У a тўғри чизиқни B нуқтада кесиб ўтади.

Агар M нуқта орқали ℓ тўғри чизиқ билан $\angle 4=\angle 3$ бурчакни ёки $\angle 1=\angle 2$ бурчакни ҳосил қиладиган қилиб, b тўғри чизиқни чизсак, изланаётган тўғри чизиқ ясалган бўлади, бундай ясаш 1-масалада қаралган.

ЯСАШГА ДОИР БЕРИЛГАН ҚУЙИДАГИ МАШҚЛАРНИ БАЖАРИНГ

1. a кесма берилган. Уни 4та тенг бўлакка бўлинг.
2. Учбурчак берилган. Унинг медианасини ясанг.
3. a тўғри чизиқ берилган. Агар: а) AB кесма a тўғри чизиқнинг бир томонида ётса; б) AB кесманинг учлари a тўғри чизиқнинг турли томонларида ётса, унда AB кесманинг a тўғри чизиқдаги проекциясини ясанг.
4. Учбурчак берилган. Шу учбурчакнинг баландлигини ясанг.
5. a ва b бурчаклар берилган. Берилган тўғри чизиқнинг бир томонида; а) $a+b$ йиғиндини; б) $a-b(a>b)$ айирмани ясанг.
6. Учбурчак берилган. Унга тенг учбурчакни ясанг.
7. Уч томони бўйича учбурчак ясанг. Шу учбурчакни ясанг.
8. Тенг томонли учбурчак томони a га тенг. Шу учбурчакни ясанг.

9. Ён томонлари ва асоси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

10. Икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича учбурчакни ясанг.

11. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари берилган. Шу учбурчакни ясанг.

12. Бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

13. Асоси, унга ёпишган бурчаги бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

14. Ёйиқ бурчакнинг биссектрисасини ясанг.

15. Қўшни бурчаклар биссектрисаларини ясанг.

16. Берилган бурчакни 4та тенг бўлакка бўлинг.

17. Берилган бурчакдан уч марта катта бурчакни ясанг.

18. Айлананинг берилган ёйини тенг иккига бўлинг.

19. a тўғри чизиқ ва унда ётмаган M нуқта берилган. M нуқта орқали ўтиб, a тўғри чизиққа параллел (перпендикуляр) бўлган тўғри чизиқни ясанг.

20. Қуйидаги масалаларни ечинг:

а) Учбурчакнинг учта учидан бир хил узоқликда ётган нуқтани топинг (жавоби: учбурчакнинг учала томонлари ўрталаридан уларга ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси бўлади).

б) Бурчакнинг томонларини кесиб ўтувчи тўғри чизиқдан, шу бурчак томонларидан бир хил узоқликда ётган нуқтани топинг (жавоби: биссектриса билан кесувчи тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси бўлади).

в) Учбурчакнинг учала томонидан бирдай узоқликда ётган нуқтани топинг (жавоби: учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси бўлади).

18-§. ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ БОСҚИЧЛАРИ

Ясашга доир қийинроқ геометрик масалаларни ечишда қуйидаги тўрт босқични кўриб чиқишни тавсия қиламиз.

Анализ. Бу ясашга доир масалани ечишнинг асосий босқичи. Чунки бунда ясашни бажаришнинг тартибли режаси тузилади. Худди шундай масалада берилган элементлар билан ясаш керак бўлган элементларнинг ўртасидаги боғлиқлик кўрсатилиб, ясашни бажариш йўлларининг кетма-кетлиги аниқланади. Шунинг учун анализ ясашга оид масалалар ечишнинг калити деб аталади.

Анализ ўтказаётганда изланаётган фигурани ясалди деб ҳисоблаб, масала шартини қаноатлантирувчи чизмани тахминан чизиб оламиз. Ундан сўнг бу чизма бўйича берилган ва изланувчи элементларни ажиратиб, уларнинг ўртасидаги боғланиш кўрсатилади. Шу билан бирга берилган элементлар орқали изланувчи элементларни қандай қилиб ясаш кераклиги аниқланади.

Ясаш. Анализ асосида берилган асбоблар(чизғич, циркуль) ёрдамида изланувчи фигурани ясаш бажарилади. Демак, ясаш асбоблар ёрдамидагина бажарилиш керак. Ясашнинг бажарилиш кетма-кетлиги анализ асосида бажарилади.

Ясашда бажарилган чизма анализдаги чизмадан бўлак бажарилиши керак.

Масала шартида берилган фигуралар (кесма, бурчак, айлана ва бошқалар) ясалган бўлади. Ясашда ўша фигураларнинг катталиклари ўзгартирилмасдан, асбоб билан ўлчаниб қўйилади (ясалади). Демак, ясашда берилган фигуралардангина фойдаланамиз.

Исбот. Бунда тузилган фигура масала шартини қаноатлантириши исботланади. Исботда геометриянинг маълум аксиома, таъриф ва теоремаларидан фойдаланилади. Исботни бажаришда ясаш давомида ҳосил бўлган чизмадан фойдаланиш керак.

Содда масалаларни ечишда исбот талаб қилинмайди.

Текшириш қуйидаги саволларга жавоб бериш мақсадида бажарилади:

1) Масаланинг шартида берилган элементларни ҳоҳлагандай қилиб олганда ҳам масала ечимга эга бўладими? Қайси ҳолда масаланинг ечими бўлмайди, яъни масала ечимга эга эмас?

2) Масаланинг ечими биттами ёки кўпми?

3) Ясашни соддалаштирувчи ёки аксинча қийинлаштирувчи қандайдир ўзгача ҳоллар масалада йўқми?

1-масала. Бир томони, иккинчи томонига ўтказилган медианаси ва шу медиана билан берилган томон орасидаги бурчаги бўйича учбурчак ясанг (97-расм).

Берилган. a томони (кесма), m_b - медиана, α - бурчаги (97-расм).

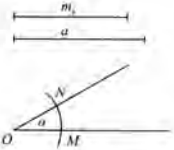
Анализ. Изланувчи учбурчакни ясалди, деб ҳисоблайлик. У ABC учбурчак бўлсин (98-расм) $BC=a$, D нуқта AC томонининг ўртаси, $BD=m_b, \angle CBD=\alpha$ деб ҳисоблайлик.

Учбурчакни ясаш учун унинг учала учларини ясаш етарли. Бунда B ва C учларини осон ясаш мумкин. Бунинг учун ℓ тўғри чизиқни олиб, унда *B* нуқтани белгилаймиз. Сўнг $BC=a$ бўладиган қилиб, циркуль ёрдамида a кесмани ўлчаб қўйиб, *C* учини ясаймиз.

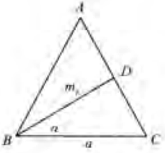
Энди *A* учини ясаш учун масаланинг қолган шартларидан фойдаланамиз. Масала шарти бўйича, *BD* медиана бўлганлиги сабабли, *D* нуқта *AC* томонининг тенг ўртасида ётади. *BDC* учбурчакни осонгина ясаш мумкин. Икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган. Ундан кейин *CD* томонини давом эттириб, унга $DA=CD$ кесмани ўлчаб қўйиб, *A* учини ясаш мумкин. Шундай қилиб, масалани ясаш йўли топилди.

Ясаш. Бу ясашга доир ечилаётган биринчи масала бўлганлиги сабабли, ясашни бажарилишига тўлиқ тўхталиб ўтамиз.

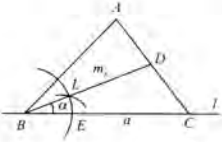
ℓ тўғри чизиқни чизиб, унда ихтиёрий *B* нуқтани белгилаймиз (99-расм). Ясаш 97-расмда берилганлар орқали бажарилади. ℓ тўғри чизиққа *B* дан бошлаб a кесмани циркуль ёрдамида ўлчаб қўямиз ва *C* нуқтани ясаймиз ($BC=a$). Энди $\angle CBD=\alpha$ бўладиган қилиб, α бурчакни ясаймиз. Бунинг учун $\omega(O;OM)$ орқали (97-расм) ихтиёрий *MN* ёйни чизамиз (1-масала). Ундан кейин яна $\omega_1(B;OM)$ ва $\omega_2(E;MN)$ ёйларни чизамиз (99-расм). ω_1 ёй *BC* томонни *E* нуқтада кесиб ўтади. Энди ω_1 ва ω_2 ёйлари *L* нуқтада кесишади. Натижада $\angle CBL_1=2d$ бўлади. Ундан кейин *BL* нурга $BD=m_b$ кесмани (берилган бўйича) ясаб, *D* нуқтани топамиз. Энди *CD* нурга *D*



97-расм



98-расм



99-расм

нуқтадан бошлаб $CD=DA$ кесмани ўлчаб қўйиб, *A* учини ясаймиз. *A*, *B*, *C* нуқталарини кесмалар орқали туташтирсак, изланувчи *ABC* учбурчак ҳосил бўлади.

Исбот. Исбот доим ясашда бажарилган чизмага (99-расмга) нисбатан бажарилади. Тузилган *ABC* учбурчак масала шартини қаноатлантиради. Чунки ясаш бўйича

$BC = a, \angle CBD = \alpha, BD = m_b$. Шунингдек $CD=DA$ бўлганлиги сабабли, $BD = m_b$ медиана бўлади. Демак, ясалган ABC учбурчакнинг барча элементлари берилган масала шартини қаноатлантиради.

Текшириш. a томонининг ва m_b медиананинг ихтиёрий узунликларида масаланинг ечими бўлади. α бурчак $0 < \alpha < 180^0$ шартни қаноатлантиргандагина масала ечимга эга бўлади. Бу ҳолда BCD учбурчакни, демак, ABC учбурчакни доимо ясаш мумкин. Бироқ, $\alpha \geq 180^0$ бўлганда масала ечимга эга бўлмайди, чунки учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180^0 га тенг бўлганлиги сабабли унинг ҳар бир бурчаги, шунингдек бир учидан чиқувчи медиана билан томоннинг орасидаги бурчаги доимо 180^0дан кичик бўлиши керак.

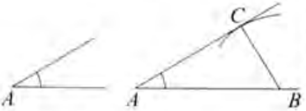
Шундай қилиб, масаланинг фақат битта ечими бор. Чунки масала шартида берилган элементларни фақат бир хилгина йўл билан ясаш мумкин.

Енгил масалаларни ечишда бу тўрт босқични ҳаммасини бажариш мажбур эмас.

2-масала. Икки томони ва шу томонлардан кичкинасининг қаршисида ётган бурчаги бўйича учбурчак ясанг (бу ҳолда иккита ёки битта ечимга эга бўлиши ёки масала ечимга эга бўлмайди).

Бу масаланинг ечилишига тўлиқ тўхталиб ўтамиз.

Анализ. Масалани ечиш режасини тузиш учун масала ечилди деб тахмин қиламиз ёки ABC учбурчакнинг (99 а -расм) AB ва BC томонлари ва $BC < AB$ бўлганлиги сабабли A бурчак берилган бўлсин. Бу шартда ABC учбурчакни тузиш учун аввал A бурчакка тенг бурчакни ясаб олиб, унинг бир томонига бурчак учидан бошлаб катта томонни қўйиб, учбурчакнинг икки учига (A ва B) эга бўлишимиз расмда кўриниб турибди. Учбурчакнинг учинчи С учини топиш учун маркази B учида бўлган, радиуси кичик томонга тенг бўлган ёй чизамиз. Учбурчакнинг C учи шу ёй билан бурчакнинг иккинчи томонининг кесишиш нуқтаси бўлади.



99 ^{a} -расм

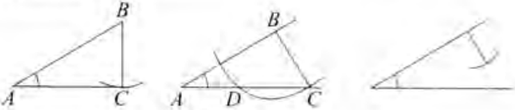
Ясаш. Берилган бурчакка тенг бўлган бурчакни ясаб, учидан бошлаб унинг бир томонига берилган икки томоннинг каттасини ўлчаб қўямиз. Катта томоннинг иккинчи учини (бурчак учида ётмаганлиги учун) марказ қилиб олиб, кичик томонга тенг радиус билан айлана чизамиз, бу айлана бурчакнинг иккинчи томони билан кесишиб, бизга учбурчакнинг учинчи учини беради.

Синтез (исбот). Юқоридаги ясаш натижасида ҳосил бўлган учбурчак изланаётган учбурчак бўлади, чунки, бу учбурчак масаланинг барча талабларини қаноатлантиради, ҳақиқатдан ҳам, A бурчак берилган бурчакка тенг қилиб ясалди. AB томони берилган томонларнинг узунига тенг бўлиб, BC томони берилган томонларнинг кичигига тенг бўлиб ясалди ва A бурчак берилган томонларнинг кичиги қаршисида ётади.

Текшириш. Бу масала шартида берилганларнинг барча қийматларида ҳам фақат битта ечимга эга бўлади-ми ёки яна бошқа ечимга эга бўлиши мумкинми?

Берилган кичик томоннинг қаршисида ётганлиги сабабли бу бурчак албатта тўғри бурчакдан кичик бўлиши керак, акс ҳолда катта томон қаршисида ётган бурчак тўғри бурчакдан жуда катта бўлиб кетар эди (демак, учбурчакнинг фақат икки бурчагининг йиғиндиси $2d$ дан ортиб кетади).

Шундай қилиб, берилган ўткир бурчакнинг қиймати қандай бўлишига қарамай масала ё фақат битта ечимга (бу ҳолда изланаётган учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлади, бунда B марказли BC радиусни айлана AC тўғри чизиқ фақат M нуқтада уриниб ўтади) ёки икки ечимга (бу ҳолда изланаётган учбурчакларнинг бири ўтмас бурчак, иккинчиси ўткир бурчак бўлади. Бунда B марказли BC радиусли айлана AC тўғри чизиқни икки нуқтада кесиб ўтади), эга бўлиши ёки битта ҳам ечимга эга бўлмаслиги (бу ҳолда B марказли BC радиусли айлана AC тўғри чизиқ билан кесишмайди ва уринмайди) $99^{б}$-расмдан кўриниб турибди.



$99^{б}$-расм

МАШҚЛАР

1. ℓ тўғри чизиқ ва ундан ташқарида ётган M нуқта берилган. ℓ тўғри чизиқда M нуқтадан a узоқликда ётган нуқтани топинг. a нинг қийматига нисбатан масаланинг ечилишини текширинг.

2. Берилган A нуқтадан a масофада, B нуқтадан b масофада ётган нуқталарни ясанг. Қандай шартда масала ечимга эга бўлади? Қачон масала ечимга эга бўлмайди?

3. Берилган A ва B нуқталар орқали $(AB = b)$ ўтувчи ва радиуси a га тенг бўлган айланани ясанг.

4. Берилган умумий марказга эга бўлган икки айланага уриниб ўтувчи айланани ясанг. Бундай айланалар марказларининг геометрик ўрни (г.ў.) қандай фигура бўлади?

5. Тенг ёнли учбурчакнинг: а) ён томони ва учидаги бурчаги; б) ён томони ва асосидаги бурчаги; в) асоси ва унга туширилган баландлиги берилган бўлса, учбурчакни ясанг.

6. Тўғри бурчакли учбурчакни унинг: а) катети ва гипотенузаси; б) катети ва ўткир бурчаги; в) гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича ясанг.

7. Учбурчакнинг икки томони ва уларнинг бири қаршисидаги бурчаги берилса, учбурчакни ясанг.

8. Учбурчак берилган. Унинг бир учи орқали қаршисида ётган томонга параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

9. Икки томони ва уларнинг бирига ўтказилган: а) медианаси; б) баландлиги бўйича учбурчакни ясанг.

10. Катети ва шу учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси бўйича тўғри бурчакли учбурчак чизинг.

11. а) асосига туширилган баландлиги ва икки ён томони; б) томони унга туширилган баландлиги ва медианаси бўйича учбурчак ясанг.

19-§. АЙЛАНАГА УРИНМА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

$\omega(O,R)$ айлана берилган. M нуқтадан айланага ўтказилган уринма ясашни қараймиз.

Бу 15–§ даги теоремаларга асосланади. Икки ҳол бўлиши мумкин.

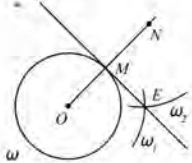
а) M нуқта айланада ётади (100-расм), t изланаётган тўғри чизиқ бўлсин. Унда $OM \perp t$ бўлади.

Бу t уринмани ясаш учун OMнинг давомига $MN=OM$ кесмани ясаб, $\omega_1(O;R)$ ва $\omega_2(N,r)$ ёйларни чизамиз (18 – §. 4-масала) бунда $r > R$ бўладиган қилиб оламиз. Ёйларнинг кесишиш нуқтасини E билан белгилаймиз. ME тўғри чизиқ, бошқача айтганда t изланаётган тўғри чизиқ бўлади.

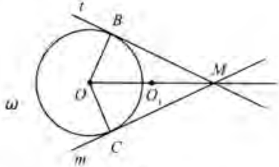
б) M нуқта $\omega_1(O;R)$ айлана ташқарисида ётсин (101-расм). M нуқтадан ўтказилган уринма t, уриниш нуқтаси B бўлсин.

$OB \perp t$ бўлиши аниқ (15-§; 32-теорема).

В уриниш нуқтасини топиш учун OMB тўғри бурчакли учбурчакни ясаймиз. $OO_1=O_1M$ бўладиган қилиб O_1 нуқтани танлаб, $\omega(O_1, OM)$ айланасини чизамиз. Бу ω айланага B ва C нуқталарда уриниб ўтади. MB ва MC тўғри чизиқлар ёки t ва m тўғри чизиқлар уринмалар бўлади. Демак, айлананинг ташқарисида ётган нуқтадан шу айланага икки уринма ўтказиш мумкин.



100-расм



101-расм

МАШҚЛАР

1. Айлана берилган. Бир-бирига перпендикуляр бўлган AB ва CD диаметрларини ясанг.
2. Айлана ва унинг AB диаметри берилган. Шу диаметр билан: а) 45^0 бурчакни тузувчи AC ватарни; б) 60^0 бурчак ҳосил қилувчи AD ватарни ясанг.
3. Берилган бурчакнинг томонларига уриниб ўтувчи берилган радиусдаги айланани ясанг.
4. Параллел икки тўғри чизиққа уриниб ўтувчи айланалар марказларининг геометрик ўрни қандай фигура бўлади? Чизмани ясанг.
5. Берилган тўғри чизиққа уриниб ўтувчи тенг айланалар марказларининг геометрик ўрни қандай фигуралар бўлади? Чизмани ясанг.
6. Берилган бурчакнинг томонларига уриниб ўтувчи айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг. Чизмани ясанг.
7. Берилган айланага ва берилган тўғри чизиққа ўриниб ўтувчи берилган радиусдаги айланани ясанг.
8. Умумий марказга эга бўлмаган ва бири иккинчисининг ичида ётмаган икки айлана берилган. Уларнинг умумий уринмасини ясанг.
9. Уринувчи икки айлананинг умумий уринмасини ясанг.

20-§. УЧБУРЧАККА ИЧКИ (ТАШҚИ) ЧИЗИЛГАН АЙЛАНАЛАР

Учбурчакнинг учлари орқали ўтувчи айланани шу учбурчакка **ташқи чизилган айлана** деб атаймиз. Унда *ABC* учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази *O* нуқта бўлса, унда *OA=OB=OC* бўлиши маълум. Демак, учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази унинг томонлари ўртасидан ўтган перпендикулярнинг кесишиш нуқтасида ётади, чунки *OA=OB* бўладиган қилиб *O* нуқта *AB* кесманинг ўртаси орқали ўтган перпендикулярда ётади, *OB=OC* учун ҳам шунинг ўзини айтиш мумкин (юқорида аниқланган).

Натижада бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқта орқали биргина айланани ясаш мумкин, деган хулосага келамиз.

Таъриф. Учбурчак томонларига уриниб ўтувчи айлана учбурчакка ички чизилган айлана деб аталади.

Агар тўғри чизиқ айланага уриниб ўтса, бу тўғри чизиқ уриниш нуқтасига ўтказилган радиусга перпендикуляр бўлади (15-§, 32-теорема). Бу тушунчаларнинг асосидан қуйидагиларни айтиш мумкин. Агар *O* нуқта *ABC* учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази бўлса, унда *OM, OD, OE* кесмалари ўзаро тенг ва учбурчакнинг *AB,BC,CA* томонларига мос равишда перпендикуляр бўлганлиги учун *O* маркази ва *OM* радиуси бўйича ўтказилган айлана учбурчакнинг томонларига *M, D, E* нуқталарда уриниб ўтади. Бу учбурчакка ички чизилган айлана бўлади. Демак, учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтасида ётади. Бундай айлана фақат битта бўлади. Чунки *O* марказ, OM радиус фақат бир йўл билан аниқланади.

Демак, берилган учбурчакка ички чизилган айланани ясаш учун учбурчакнинг икки бурчаги биссектрисаларини ясаш керак. Уларнинг кесишиш нуқтаси изланаётган айлана маркази бўлади. Бу марказдан учбурчакнинг қандайдир бир томонига перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг узунлигини радиус қилиб айлана чизамиз. Бу изланаётган айлана бўлади.

МАШҚЛАР

1. Айлана берилган. Унга ички чизилган ихтиёрий учбурчак ясанг.
2. Учбурчак берилган. Унинг томонларининг ўрталари орқали ўтиб, мос томонларига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларни ясанг.

3. Учбурчак томонларининг ўрталаридан ўтиб, мос томонларига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

4. Берилган учбурчакка ташқи чизилган айланани ясанг.

5. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айланани ясанг, уни қулай ясаш йўлини кўрсатинг.

6. Учбурчакнинг баландликлари бир нуқтада кесишишини исботланг.

Кўрсатма. Берилган учбурчакнинг ҳар бир учи орқали қаршисидаги томонга параллел тўғри чизиқлар ўтказинг. Берилган учбурчакнинг баландликлари янги ҳосил бўлган учбурчак томонларининг ўрталарига ўтказилган перпендикуляр бўлади. Энди 3-масаладан фойдаланиб, исботни бажаринг.

7. Учбурчак берилган. Унинг бурчаклари биссектрисаларини ясанг.

8. Учбурчак бурчаклари биссектрисалари бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Бурчак биссектрисасининг ҳар бир нуқтаси томонларидан бир хил узоқликда бўлишидан фойдаланинг. Икки бурчагининг биссектрисалари кесишган нуқта учинчи бурчак биссектрисасида ётишини исбот қилиш керак.

9. Учбурчак берилган. Унга ички чизилган айланани ясанг.

Кўрсатма. 8-масаланинг ечимидан фойдаланинг. Берилган учбурчакнинг ички бурчаклари биссектрисаларининг кесишган нуқтасини ички чизилган айлананинг маркази қилиб олиш мумкин.

10. Тенг томонли учбурчакда: а) ички; б) ташқи чизилган айлана ясашнинг қулай усулларини кўрсатинг.

11. ABC учбурчак берилган. A бурчагининг ва B, C бурчакларининг ташқи бурчаклари биссектрисалари кесишган нуқтани топинг.

12. Берилган учбурчакнинг ташқарисига ички чизилган айланани ясанг.

Кўрсатма. 11-масаланинг ечимидан фойдаланинг.

13. Икки томони ва ташқи чизилган айлана радиуси бўйича учбурчак ясанг.

14. Бир томони, унинг учидаги бурчаги ва ички чизилган айлана радиуси бўйича учбурчак ясанг.

IV БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Геометрик ясашга таъриф беринг.

2. Ясашга берилган геометрик масалаларни ечими деб нимага айтилади?

3. Масалаларни ечишда қандай қуроллар қўлланилади? Уларнинг вазифаси қандай?
4. Масалаларни ечиш қандай боқичлардан иборат?
5. Ясашга доир содда масалаларни санаб чиқинг.
6. Айланада ётган нуқта орқали унга уринма қандай ўтказилади?
7. Айланадан ташқарида ётган нуқта орқали шу айланага уринма қандай ўтказилади? Нечта уринма ўтказиш мумкин?
8. Учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази қандай топилади?
9. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази қайси ерда бўлади?

IV БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Берилган нуқтадан ва берилган тўғри чизиқдан a узоқликда ётган нуқтани ясанг.
2. Асоси ва унинг қаршисида ётган бурчаги ҳамда ён томони бўйича учбурчак ясанг.
3. Бир бурчаги ва шу бурчак томонларига туширилган баландликлари бўйича учбурчак ясанг.
4. Асоси, унга ёпишган бурчаги ва асосига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
5. Икки томони ва уларнинг бирига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
6. Бир томони, унга ёпишган бурчаги ва шу томонга ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.
7. Томони, унга ёпишган бурчаги ва шу бурчак биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.
8. Тўғри бурчакли учбурчак ясанг: а) икки катети бўйича; б) гипотенузаси ва унга туширилган баландлиги бўйича.
9. Томони, унга туширилган меданаси ва қолган икки томонининг бирига ўтказилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
10. Катети ва иккинчи катети билан гипотенузасининг йиғиндиси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

    Кўрсатма. $BC=a$ ва $DC=b+c$ катетлари бўйича BDC тўғри бурчакли учбурчакни ясанг. BD томонининг ўртаси орқали тўғри чизиқ ўтказинг.
11. A,B икки бурчаги ва икки томонининг $b+c$ йиғиндиси бўйича учбурчак ясанг.

Кўрсатма: ABC учбурчак ясалди, деб ҳисоблаб, AB томонининг давомида $DA=AC$ кесмани ўлчаб қўйинг. ACD тенг ёнли учбурчак бўлади. Ундан $\angle CDA = \angle DCA = \frac{1}{2} < A$ эканлиги осон билинади. DC томонининг ўртаси орқали ўтувчи перпендикуляр тўғри чизиқни ясанг.

12. A нуқта орқали ўтувчи R радиусли айлана ясанг.

13. A нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиқ орқали тенг иккига бўлинувчи берилган радиусдаги айланани ясанг.

14. Берилган нуқта орқали ўтиб берилган айланага уриниб ўтувчи берилган радиусдаги айланани ясанг.

15. Параллел икки тўғри чизиқ ва уларда ётмаган M нуқта берилган. Берилган тўғри чизиқларга уриниб, M нуқта орқали ўтувчи айланани ясанг.

16. Ички уринувчи икки айлана берилган . Уларнинг бирига ташқаридан, иккинчисига ички уриниб ўтувчи айланани ясанг.

17. Ички уринувчи икки айлана берилган. Уларнинг иккаласига ҳам ташқи (ички) уриниб ўтувчи айланани ясанг. Бундай айланалар нечта бўлиши мумкин?

18. Ташқи уринувчи икки айлана берилган. Уларнинг ҳар бирига ички уриниб ўтувчи айланани ясанг.

19. Айлана чизилиб, лекин маркази кўрсатилмаган. Чизмачилик учбурчагидан фойдаланиб, бу айлана марказини ясанг.

20. Айлана чизилган, лекин маркази кўрсатилмаган. Агар бу айлана радиуси a кесмага тенглиги маълум бўлса, унда фақаттина циркуль ёрдамида унинг марказини қандай қилиб ясаш мумкинлигини кўрсатинг.

8-СИНФ

V БОБ. ТЎРТБУРЧАКЛАР

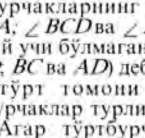
21-§. ТЎРТБУРЧАКЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Таъриф: Ихтиёрий учта нуқтаси бир тўғри чизиқда ётмаган тўрт нуқта ва уларни кетма-кет туташтирувчи кесмалардан иборат фигура тўртбурчак деб аталади.

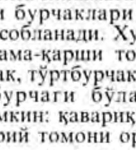
Аниқроқ айтганда, A,B,C,D тўрт нуқта берилса, уларни кетма-кет кесмалар орқали туташтириб тўртбурчакка эга бўламиз, уни $ABCD$ орқали белгилайлик (102-расм). A,B,C,D– унинг учлари, AB,BC, CD,DA - томонлари. $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$ унинг бурчаклари бўлиб ҳисобланади. A ва C, B ва D қарама-қарши учлари бўлади.

Қарама-қарши учларини туташтирувчи кесмалар *(AC,BD)* **диагоналлар** деб аталади. Бир томонига ёпишмаган бурчаклар тўртбурчакларнинг қарама-қарши бурчаклари ($\angle ABC$ ва $\angle CDA$; $\angle BCD$ва $\angle DAB$) бўлиб ҳисобланади. Худди шундай умумий учи бўлмаган томонлар қарама-қарши томонлар (AB ва CD; BC ва AD) деб аталади. Демак, тўртбурчакнинг тўртта учи, тўрт томони ва тўртта бурчаги бўлади, бироқ тўртбурчаклар турлича бўлиши мумкин: қавариқ ва қавариқ эмас. Агар тўртбурчакнинг ихтиёрий томони орқали тўғри чизиқ ўтказганда тўртбурчак ўша тўғри чизиқ орқали бўлинган ярим текисликларнинг бирида ётса, унда бу тўртбурчак қавариқ, акс ҳолда эса қавариқ эмас деб аталади. Юқоридаги $ABCD$ тўртбурчак қавариқ, $EFKL$ эса (102-расм) қавариқ эмас, чунки KL ва EL тўғри чизиқлари орқали бўлинган ярим текисликларнинг бирида ётмайди.

Биз бундан кейин фақат қавариқ тўртбурчакларнигина кўриб чиқамиз, шунинг учун уларни содда қилиб тўртбурчаклар деб атаймиз. Тўртбурчак томонларининг йиғиндиси унинг **периметри** деб аталади.



102 - расм



103 – расм

34-теорема: **Тўртбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 360^0га тенг.**

Исбот. $ABCD$ тўртбурчак берилган бўлсин (103-расм). AC диагонали уни икки учбурчакка бўлади: ΔABC ва ΔACD. Бу учбурчаклар ички бурчакларининг йиғиндиси берилган тўртбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисига тенг. Ҳар бир учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180^0 бўлганлиги сабабли тўртбурчак ички бурчаклари йиғиндиси 360^0 бўлади. Теорема исбот қилинди.

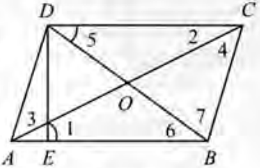
МАШҚЛАР

1. а) $ABCD$ қавариқ; б) $KLMN$ қавариқ эмас тўртбурчакларни чизинг. Қавариқ ва қавариқ эмас тўртбурчакларнинг фарқини тушунтиринг; в) учлари, томонлари, бурчаклари ва қарама-қарши учларини белгилаб кўрсатинг; г) диагоналларини айтинг.
2. Қавариқ тўртбурчакнинг томонлари 8 см, 12 см, 6 см, 11см бўлса, унинг периметрини топинг.
3. Тўртбурчак бир томонининг узунлиги қолган уч томони узунликлари йиғиндисидан кичик бўлишини исбот қилинг.
4. Тўртбурчакнинг томонлари 2см, 6см, 9см, 17 см бўлиши мумкинми?
5. Тўртбурчак диагонали орқали иккита учбурчакка бўлинган. Агар учбурчакларнинг, тўртбурчакнинг периметрлари мос равишда 30м, 36м ва 34м бўлса, тўртбурчакнинг диагоналини топинг.
6. Томонлари a, диагонали d бўлса, тўртбурчакни ясанг.
7. Тўртбурчак томонларининг нисбати 4:5:8:2 га тенг, периметри 57 дм бўлса, тўртбурчак томонларини топинг.
8. Тўртбурчак томонларининг нисбати 3:1:5:11 нисбатга тенг бўлиши мумкинми?
9. Тўртбурчакнинг бир бурчаги 112^0 бўлса, қолган бурчакларининг йиғиндисини топинг.
10. Агар тўртбурчакнинг 3та бурчаги тўғри бурчак бўлса, у ҳолда тўртинчи бурчаги ҳам тўғри бурчак бўлишини исбот қилинг.
11. Агар тўртбурчакларнинг нисбати 3:5:6:1 нисбатда бўлса, унинг ҳар бир бурчагини топинг.
12. $ABCD$ тўртбурчакда $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D = 6:7:8:9$, бўлса бу тўртбурчакнинг параллел томонлари борми?
13. Агар тўртбурчакнинг икки бурчагининг нисбати 5:7 га тенг, учинчи бурчаги уларнинг айирмасига, тўртинчи бурчаги эса учинчи бурчагидан 24^0га кичик бўлса, тўртбурчакнинг бурчакларини топинг.

22-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Қарама-қарши томонлари параллел бўлган тўртбурчак **параллелограмм**[1] дейилади.

104 -расмда $ABCD$ параллелограмм кўрсатилган: $AB \parallel CD, BC \parallel AD$. Қавариқ тўртбурчакнинг учлари, томонлари, бурчаклари периметри қандай аниқланса, параллелограммда ҳам улар худди шундай ифодаланади. Чунки параллелограмм ҳам қавариқ тўртбурчак. Ҳақиқатан ҳам параллелограмм ҳам бир томони орқали ўтказилган тўғри чизиқ ажиратган ярим текисликнинг фақат биттасида ётади.



104-расм

Параллелограммнинг бир учидан унинг қаршисида ётган томонига туширилган перпендикуляр унинг баландлиги деб аталади. $DE \perp AB$, унда DE кесма параллелограммнинг D учидан AB томонига туширилган баландлиги бўлади.

35-теорема. **Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг.**

У ABC ва ACD учбурчакларнинг тенглигидан келиб чиқади (AC – умумий томон, $\angle 1=\angle 2$; $\angle 3=\angle 4$). Демак, $AB=DC$, $BC=AD$ бўлади.

Натижалар.

1. Параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг.
2. Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Бу $\Delta ABO = \Delta CDO(AB = DC\ \angle 1 = \angle 2; \angle 6 = \angle 5)$ дан келиб чиқади. $AO=OC$, $BO=OD$ бўлади.
3. Параллелограммнинг бир томонига ёпишган бурчакларнинг йиғиндиси 180^0га тенг.

Бу икки тўғри чизиқнинг параллеллик белгисидан келиб чиқади. 35-теорема ундан келиб чиқувчи 1-, 2-, 3- натижаларнинг ҳар бирига тескари фикрлар ҳам тўғри бўлади. Улар қуйидагилар:

36-теорема. **Агар қавариқ тўртбурчакнинг:**

а) қарама-қарши томонлари параллел бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак - параллелограмм бўлади;

---

[1] Грекча сўз бўлиб, қарама-қарши томонлари параллел бўлган тўртбурчак, деган маънони билдиради.

б) қарама-қарши бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак - параллелограмм;

в) диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, у ҳолда бу тўртбурчак параллеллограмм бўлади.

г) бир томонига ёпишган бурчакларининг йиғиндиси 180^0 бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.

Бу тескари теореманинг ҳар бир ҳолини мустақил исбот қилинг.

Кўрсатма. 36 – теорема а) ҳолини исботлашда учбурчаклар тенглигининг 3-аломатини; б) ҳолида тўртбурчаклар йиғиндисининг 360^0 бўлишини; в) ҳолини исботлашда учбурчаклар тенглигининг 1-аломатини; г) ҳолини исбот қилишда тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатини қўлланиш тавсия қилинади.

Юқоридаги теоремалар асосида параллелограммнинг аломати сифатида қуйидаги теоремани ифодалаш мумкин.

37-теорема: **Агар қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши икки томони тенг ва параллел бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.**

Исбот. $ABCD$ қавариқ тўртбурчак берилиб, $AB=DC$, $AB \parallel DC$ бўлсин (104-расм). $AD \parallel BC$ бўлишини исбот қиламиз. $\angle 1 > \angle 2 (AB \parallel DC), AB > DC, AC$ – умумий томон бўлганлиги сабабли бу учбурчаклар тенглигининг 1-аломатига кўра $\Delta ABC > \Delta ACD$ бўлади. Бундан $\angle 4 = \angle 3$ эканлиги келиб чиқади, демак, $AD \parallel BC$.

МАШҚЛАР

1. $a \parallel b$ тўғри чизиқлар берилган. Уларни мос ҳолда A, B, C, D нуқталарда кесиб ўтувчи $c \parallel d$ икки тўғри чизиқни чизинг. Натижада $ABCD$ тўртбурчак ҳосил бўлади. Бу тўртбурчак параллелограмм эканлигини тушунтириб беринг. Чизмада чизиб кўрсатинг.
2. Параллелограммнинг томонлари: 1) 6см ва 4 см; 2) 11,5 м ва 7 м бўлса, унинг периметрини топинг.
3. Параллелограммнинг бир томони 12,4дм. Иккинчи томони ундан: 1) 0,8 дмга қисқа; б) 1,6 дмга узун; в) 4 марта кам бўлса, параллелограммнинг периметрини ҳисобланг.
4. Параллелограммнинг периметри 18,4 дм. Бир томони а) 3 дм; б) 7дм бўлса, иккинчи томонини топинг.
5. Параллелограммнинг периметри 24 см. Агар бир томони иккинчи томонидан: 1) 4 смга узун; 2) 6 смга қисқа; 3) икки марта узун бўлса, параллелограммнинг томонларини топинг.

6. Агар параллелограмм томонларининг йиғиндиси 12 см ва томонлари: а) 1:2; б) 3:2 нисбатда бўлса, унинг томонларини топинг.

7. Параллелограммнинг бир бурчаги 42^0 бўлса, қолган бурчакларини топинг.

8. Параллелограммнинг бир бурчаги иккинчи бурчагидан: а) 15^0га катта; б) $7^0 30'$га кичик; в) 2 марта катта бўлса, у ҳолда унинг бурчакларини топинг.

9. Параллелограмм диагоналларининг кесишган нуқтаси орқали ўтказилган тўғри чизиқнинг параллелограмм томонлари орасидаги кесмаси ўша нуқтада тенг иккига бўлинишини исбот қилинг.

10. а) Икки томони ва уларнинг орасидаги бурчаги; б) икки томони ва бир диагонали; в) икки диагонали ва бир томони; г) икки диагонали ва улар орасидаги бурчаги; д) асоси, баландлиги ва диагонали бўйича параллелограммни ясанг.

11. Параллелограммнинг диагонали уни тенг икки бўлакка бўлишини исбот қилинг.

12. Параллелограммнинг бир томонида ётган учлари қарама-қарши томонидан бир хил узоқликда бўлишини исбот қилинг.

13. Параллелограммнинг қарама-қарши бурчакларининг биссектрисалари параллел бўлишини исбот қилинг.

14. Параллелограммнинг томонлари 9 см ва 5 см. Диагоналлари: а) 4см; б) 7см; в) 14см; г) 3 см бўлиши мумкинми?

15. $ABCD$ параллелограммда A бурчакнинг биссектрисаси BC томонини E нуқтада кесади. Агар AB=12 дм ва AD=17 дм бўлса, BE ва EC кесмаларнинг узунлигини ҳисобланг.

16. Параллелограмм бир бурчагининг биссектрисаси унинг томонини 12 см ва 7 см узунликдаги кесмаларга бўлади. Параллелограмм периметрини топинг.

17. Параллелограмм бурчагининг биссектрисаси унинг томонини кесиб ўтганда 32^0 бурчак ҳосил қилади. Параллелограмм бурчакларини топинг.

22.1. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК

Таъриф. Ҳамма бурчаклари тўғри бўлган параллелограмм **тўғри тўртбурчак** дейилади.

Тўғри тўртбурчак ҳам параллелограммнинг бир тури бўлганлиги сабабли параллелограммнинг барча хоссалари ва у ҳақидаги теоремалар тўғри тўртбурчак учун ҳам тўғри бўлади.

$ABCD$ тўғри тўртбурчакда барча томонлари навбати билан бир-бирига перпендикуляр бўлади (105-расм).

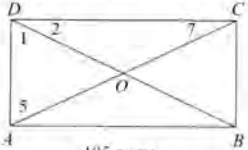
38-теорема. **Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг.**

Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан фойдаланиб, бу теоремани осонгина исбот қилиш мумкин.

39-теорема. **(38-теоремага тескари). Агар параллелограммнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу параллелограмм тўғри тўртбурчак бўлади.**

Буни тенг ёнли учбурчакнинг хоссаси ва учбурчак ички бурчаклари йиғиндисининг 180^0 бўлишидан фойдаланиб исбот қилиш мумкин.

Масалан, $ABCD$ параллелограммда (105-расм) $AC=BD$ бўлса, унда $AO=OC=OD$ бўлади. Бундан ΔAOD да $\angle 5=\angle 1$, ΔODC да $\angle 2=\angle 7$ бўлади. Бироқ, ΔACD да $\angle 5+\angle 7+\angle 2+\angle 1=180^0$. У ҳолда $\angle 1+\angle 2=90^0$. Параллелограммнинг хоссаси бўйича қолган бурчаклари ҳам тўғри бурчак бўлади. $ABCD$ - тўғри тўртбурчак. Теорема исбот қилинди.



105-расм

МАШҚЛАР

1. Тўғри тўртбурчак параллелограммдан қандай фарқ қилади?
2. Параллелограммнинг қўшни бурчаклари тенг бўлса, у тўғри тўртбурчак эканлигини исбот қилинг.
3. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари: а) 8,5 см ва 4,5 см; б) 17дм ва 8 дм бўлса, унинг периметрини топинг.
4. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони 15 см. Иккинчи томони ундан: а) 12,5м га қисқа; б) 3м га узун; в) 1,5 марта катта бўлса, тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.
5. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 24 м. Агар унинг бир томони иккинчи томонидан: а) 3 м га узун; б) 2 м га қисқа; в) 2 марта кичик бўлса, тўғри тўртбурчак периметрини топинг.
6. Тўғри тўртбурчак томонларининг:а) йиғиндиси 16 дм, нисбати 3:7га; б) айирмаси 3 дм, нисбати 5:3га тенг бўлса, унинг томонларини топинг.
7. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 18м. Агар: а) бир томонини 1,5м га орттирсак (камайтирсак); б) икки томонини ҳам 2 м га орттирсак (камайтирсак); в) икки томонини ҳам 2 марта орттирсак (камайтирсак), у ҳолда тўғри тўртбурчак периметри қандай ўзгаради?
8. Тўғри тўртбурчак диагонали томони билан 36^0 бурчак ҳосил қилади. Диагоналлари орасидаги бурчакларнинг кичик томонидаги бурчакни топинг.

9. Тўғри тўртбурчакда диагоналлари орасидаги бурчакларнинг кичик томони қаршисида ётган бурчак шу кичик томон билан диагонал орасидаги бурчакдан 30^0га катта бўлса, кичик томон билан диагонал орасидаги бурчакни топинг.

10. Тўғри тўртбурчак диагоналлари 60^0 бурчак остида кесишади. Икки диагонал ва икки кичик томонининг йиғиндиси 3,6м бўлса, диагонал узунлигини топинг.

11. а) Бир томони ва диагонали; б) икки томони; в) диагонали ва диагоналлари орасидаги бурчаги;г) асоси ва унинг диагонали билан ҳосил қилган бурчаги бўйича тўртбурчак ясанг.

12. Тўғри тўртбурчак бир бурчагининг биссектрисаси унинг томонларидан бирини 12 см ва 8 см кесмаларга бўлади. Тўғри тўртбурчак томонларини топинг.

13. Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айланани ясанг.

14. Тўғри тўртбурчак периметри 22 дм. Тўғри тўртбурчакнинг ичида ётган ихтиёрий нуқтадан томонларигача бўлган масофалар йиғиндисини топинг.

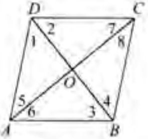
22.2. РОМБ

Таъриф: Барча томонлари тенг бўлган параллелограмм ромб[1] деб аталади.

ABCD ромб бўлсин (106-расм). У параллелограммнинг бир тури бўлганлиги сабабли, параллелограммнинг барча хоссалари ва у ҳақидаги теоремалар ромб учун ҳам тўғри бўлади. Бунда $AB=BC=CD=DA$ бўлиши тушунарли.

***40-теорема*. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва улар бурчакларни тенг иккига бўлади.**

Исбот. *ABCD* ромб, AC,BD - диагоналлар (106-расм).



106-расм

$AC \perp BD$, $\angle 1 = \angle 2$ бўлишини исбот қиламиз.

$AO=OC$ (35-теорема, 2-натижа). ΔACD – тенг ёнли учбурчак, унда DO медиана унинг баландлиги ҳам, биссектрисаси ҳам бўлади: $DO \perp AC$ ёки $AC \perp BD$, худди шундай $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$; $\angle 5=\angle 6$; $\angle 7=\angle 8$ бўлиши тушунарли.

***41-теорема*. (40-теоремага тескари теорема). Агар параллелограммнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, у ромб бўлади.**

---

[1] Грекча сўз бўлиб, параллелограммнинг бир тури деган маънони билдиради.

Теоремани мустақил исбот қилинг.

1. Умумий ҳолда ромб параллелограммдан қандай фарқ қилади?
2. Ромбнинг томони 6,5 дм бўлса, унинг периметрини топинг.
3. Ромбнинг периметри 36,4 м бўлса, унинг томонини топинг.
4. Ромбнинг бир диагонали унинг томонига тенг бўлса, ромбнинг бурчакларини топинг.
5. Ромбнинг ўткир бурчаги 42° бўлса, қолган бурчакларини топинг.
6. Агар параллелограммнинг: а) диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлса; б) диагонали бурчакни тенг иккига бўлса, унда бу параллелограмм ромб бўлишини исбот қилинг.
7. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромбнинг учлари бўлишини исбот қилинг.
8. Ромбнинг томони унинг диагоналлари билан айирмаси 15° га тенг бурчакларни ҳосил қилади. Ромбнинг бурчакларини топинг.
9. Ромб томонининг диагоналлар билан ҳосил қилган бурчаклари нисбати 2:7га тенг бўлса, ромбнинг бурчакларини топинг.
10. Агар ромбнинг ўтмас бурчаги учидан унинг томонига туширилган баландлик бу томонни тенг иккига бўлса, ромбнинг бурчакларини топинг.
11. Ромбнинг периметри 16 дм, баландлиги 2 дм бўлса, ромбнинг ўтмас бурчагини топинг.
12. а) Томони ва диагонали; б) икки диагонали; в) бурчаги ва диагонали бўйича ромб ясанг.

22.3. КВАДРАТ

Таъриф: Барча томонлари тенг бўлган тўғри тўрт бурчак квадрат деб аталади.

Квадрат тўғри тўртбурчакнинг хусусий ҳоли бўлганлиги сабабли тўғри тўртбурчакнинг барча хоссалари квадрат учун ҳам тўғри.

Квадратни барча бурчаклари тўғри бурчак бўлган ромб сифатида қараш ҳам мумкин. Шунинг учун квадратнинг диагоналлари ўзаро тенг ва перпендикуляр бўлади.

1. Квадрат ромбдан қандай фарқ қилади?
2. Квадрат тўғри тўртбурчакдан қандай фарқ қилади?
3. Квадратнинг бир томони 7,5 см га тенг бўлса, унинг периметрини топинг.
4. Квадратнинг периметри 3,2 см бўлса, унинг томонини топинг.

5. Ромбнинг диагоналлари тенг бўлса, унда бу ромб квадрат бўлишини исбот қилинг.

6. а) Томони; б) диагонали бўйича квадрат ясанг.

7. Агар квадратнинг томони: а) 4,5 смга катталаштирилса; б) 3 смга кичрайтирилса; в) 3 смга катталаштирилса; г) 2 марта кичрайтирилса, унинг периметри қандай ўзгаради?

8. Ҳар бир катети 4дм бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка битта умумий бурчакка эга бўладиган қилиб квадрат чизилган. Квадрат периметрини топинг.

9. Квадрат диагонали 8 дм. Унинг томони иккинчи квадратнинг диагонали бўлиб ҳисобланади. Иккинчи квадратнинг томонини топинг.

10. Бир бурчаги тўғри бурчак бўлган ромб квадрат бўлишини исбот қилинг.

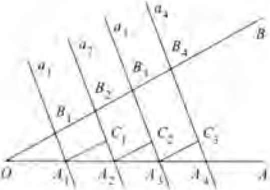
11. Квадрат берилган. Бу квадратга ташқи чизилган ва ички чизилган айланаларни тузинг. Ҳар бир ҳолда айлана маркази ва радиусини топинг.

23-§. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСИ

42 - теорема. (Фалес[1] теоремаси). **Бурчакнинг томонларини кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар бурчакнинг бир томонини тенг кесмаларга бўлса, унда улар иккинчи томонини ҳам тенг кесмаларга ажратади.**

Исбот. $\angle AOB$ берилсин (107-расм). $a_1 \| a_2 \| a_3 \| a_4$ тўғри чизиқлар бурчакнинг OA томонини мос ҳолда A_1; A_2; A_3; A_4 нуқтада, OB томонини эса B_1, B_2, B_3, B_4 нуқталарда кесиб ўтсин ва $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4$ бўлсин. Унда $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4$ бўлишини исбот қиламиз.

A_1, A_2, A_3 нуқталари орқали OB нурга параллел бўлган A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 кесмаларни ўтказамиз. $\Delta A_1C_1A_2 = \Delta A_2C_2A_3$, чунки $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$ - мос келувчи бурчаклар. $A_1A_2=A_2A_3$ (учбурчаклар тенглигининг 2–аломати). Бундан $A_1C_1=A_2C_2$ бўлади. Натижада $A_1B_1B_2C_1$; $A_2B_2B_3C_2$ параллелограммларига эга бўламиз. Унда $A_1C_1=B_1B_2$, $A_2C_2=B_2B_3$ ёки



107-расм

---

[1] Фалес Милетский - эрамизгача VI асрда яшаган таниқли грек олими.

$B_1B_2=B_2B_3$ бўлади. Қолган кесмаларнинг тенглиги (*OB* нурлардаги) шунга ўхшаш исбот қилинади. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

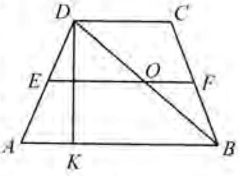
1. Фалес теоремасидан фойдаланиб, берилган кесмани тенг иккига бўлинг.
2. Берилган кесмани: а) 3; б) 5; в) 7 тенг бўлакларга бўлинг.
3. Берилган кесмани нисбатлари: а) 1:3; б) 2:5 га тенг бўлган икки кесмага бўлинг.
4. AOB бурчакнинг OA томонига $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$см ва OB томонига $OB_1=B_1B_2=B_2B_3=3см$ кесмалари ўлчаб қўйилган. $A_1B_1\|A_2B_2\|A_3B_3$ бўлишини исбот қилинг.
5. KOM бурчакнинг OK томонига $OC=1,5$ дм ва CD=1,5дм кесмалар, OM томонига OE=2дм кесма ўлчаб қўйилган. Агар (*F* нуқта *OM* томонда ётади) бўлса, *OF* кесмани топинг.
6. Учбурчакнинг бир томони 6 та тенг бўлакларга бўлинди. Бу учбурчакнинг икки томонини: а) тенг иккига; б) 3та тенг бўлакка қандай қилиб бўлиш мумкин?

24-§.ТРАПЕЦИЯ

Таъриф: Фақат икки томони параллел бўлган қавариқ тўртбурчак трапеция[1] деб аталади.

Трапеция қавариқ тўртбурчакларнинг бир тури бўлганлиги сабабли унинг элементларининг аниқланиши, белгиланиши умумий қавариқ тўртбурчакларникига ўхшаш бўлади.

ABCD трапеция бўлсин (108-расм). Трапециянинг параллел томонлари унинг асослари, параллел бўлмаган томонлари эса унинг ён томонлари деб аталади. $AB\|DN$ бўлганлиги сабабли *AB*, *DC* - асослари, *AD*, *BC* - ён томонлари бўлади.



108-расм

Агар трапециянинг бир бурчаги 90^0 бўлса, унда у **тўғри бурчакли трапеция** бўлади. Ён томонлари тенг бўлган трапеция **тенг ёнли трапеция** деб аталади.

Трапециянинг учидан асосига туширилган перпендикуляр унинг

---

[1] Грекча сўз бўлиб, «тахтача» деган маънони билдиради.

баландлиги деб аталади. $DK \perp AB, DK -$ кесма D учидан AB асосга туширилган баландлик бўлади.

Ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма трапециянинг **ўрта чизиғи** деб аталади. EF - трапециянинг ўрта чизиғи.

МАШҚЛАР

1. Трапеция билан параллелограммнинг фарқини айтинг.

2. $ABCD$ трапеция берилган. B учидан CD ён томонига ўтказилган параллел тўғри чизиқ AD катта асосини E нуқтада кесиб ўтади. ΔABE нинг периметри 18 дм, ED=5дм бўлса, берилган трапеция периметрини топинг.

3. Трапециянинг ён томони 4та тенг бўлакларга бўлинган. Бўлиниш нуқталари орқали иккинчи ён томонига параллел кесмалар ўтказилган. Агар берилган трапециянинг асослари 12дм ва 32 дм бўлса, параллел кесмалар узунликларини топинг.

4. Трапециянинг икки бурчаги 112^0 ва 65^0га тенг. Унинг қолган бурчакларини ҳисобланг.

5. Трапециянинг диагонали унинг мос бурчаклари биссектрисасида ётади. Бу трапециянинг икки томони тенг бўлишини исботланг. Бу трапецияни тенг ёнли деб аташ мумкинми?

6. Тенг ёнли трапециянинг асосидаги бурчаклари тенг бўлишини исбот қилинг.

7. Тенг ёнли трапециянинг диагоналлари тенг бўлишини исбот қилинг.

8. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси 8 см, ён томони 10 см, асосидаги бурчаги эса 45^0 бўлса, берилган тенг ёнли трапециянинг периметрини ҳисобланг.

9. Агар тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши бурчакларининг айирмаси 56^0 бўлса, трапеция бурчакларини топинг.

10. а) Тўрт томони; б) икки асоси ва икки диагонали бўйича трапецияни ясанг. Масала доим ечимга эга бўладими?

11. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси ён томонига тенг, диагонали ён томонига перпендикуляр бўлса, трапециянинг бурчакларини топинг.

12. Тенг ёнли трапециянинг диагонали ўткир бурчагини тенг иккига бўлади. Трапециянинг периметри 15 м, катта асоси 6 м бўлса, кичик асосини топинг.

13. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси 10,5 дм, ён томони - 4дм, улар орасидаги бурчаги эса 60^0 бўлса, кичик асосининг узунлигини топинг.

14. Тенг ёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан туширилган баландлик унинг катта асосини 8 см ва 26 см узунликдаги икки кесмага бўлади. Берилган трапециянинг асосларини ҳисобланг.

25-§. УЧБУРЧАК ВА ТРАПЕЦИЯНИНГ ЎРТА ЧИЗИҚЛАРИ

Аввал учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги тушунчага ва унинг хоссасига тўхталиб ўтамиз.

Таъриф: Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесма унинг **ўрта чизиғи** деб аталади.

Масалан, ABC учбурчакнинг (109-расм) AC томонининг ўртаси D нуқта BC нинг ўртаси E нуқта бўлса, унда DE кесма берилган учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Ҳар қандай учбурчакнинг ўрта чизиғи доимо мавжуд.

43-теорема. **Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи ўрта чизиғи учинчи томонига параллел ва унинг ярмига тенг бўлади.**

Исбот. ABC учбурчак берилсин (109-рам). DE ўрта чизиғини чизамиз. Бунда $DE \parallel AB$ ва $DE=\frac{1}{2}AB$ бўлишини исбот қиламиз. DE нурда E нуқтадан бошлаб $EF=DE$ кесмани ўлчаб қўямиз. Унда $\Delta DEC=\Delta BEF$ (1-аломати бўйича) бўлади. Бундан $DC=BF$ (1) ва $\angle 1=\angle 2$ (2) бўлиши тушунарли. Натижада $AD=DC=BF$ (3) бўлади. (2)дан $DC \parallel BF$ ёки $AD \parallel BF$ (4) эканлиги келиб чиқади (параллел тўғри чизиқларнинг хоссаси). Унда (3), (4) дан $ABFD$ тўртбурчак параллелограмм бўлади (37-теорема). Шундай қилиб, $DF \parallel AB$ ва $DF \parallel AB$ ёки мос ҳолда $DE \parallel AB$ ва $DE=\frac{1}{2}AB$ бўлади, бунда $DF=2DE$ эканлиги ҳисобга олинди. Теорема исбот қилинди.

Учбурчакнинг учини шу учи қаршисида ётган томоннинг тенг ўртаси билан туташтирувчи кесма шу учбурчакнинг медианаси бўлиши маълум. Масалан, ABC учбурчакнинг (110-расм) A учини BC томонининг ўртасида ётган A_1 нуқта билан туташтирсак, AA_1 медиана ҳосил бўлади, бунда A_1 нуқта медиана асоси дейилади.

44-теорема. **Учбурчакнинг учала медианаси бир нуқтада кесишади ва бу нуқта ҳар бир медианани мос ҳолда асосидан бошлаб ҳисоблаганда $\frac{1}{3}$ бўлакка бўлади.**

Исбот. ABC учбурчак берилсин (110-расм) AA_1 ва BB_1 медианаларини ўтказамиз. Улар O нуқтада кесишсин. BA_1 кесма

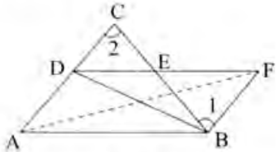
ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Унда 43-теорема асосида $B_1A_1 \| AB$ ва $B_1A_1=\frac{AB}{2}$ AO кесманинг ўртаси *D* нуқта, *BO* кесманинг ўртаси *E* нуқта бўлсин. Унда *DE* кесма *AOB* учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Худди шу, 43- теорема асосида $DE \| AB$ ва $ДЕ=\frac{AB}{2}$ эканлигини ҳосил қиламиз. Демак, $B_1A_1=DE$ ва $B_1A_1 \| DE$. Бундан, 43 - теоремадагига ўхшаш мулоҳаза қилиб, $\Delta OA_1B_1 = \Delta ODE$ га эга бўламиз. Демак, $A_1O=OD$ ва $B_1O=OE$ бўлади. $OD=DA$, $OE=EB$ эканлиги аниқ. Натижада $A_1O=OD=DA$, $B_1O=OE=EB$ эканлигини ҳосил қиламиз, яъни AA_1 ва BB_1 медианаларининг ҳар бири учта тенг бўлакка бўлинади.

Шундай қилиб, AA_1 медиана BB_1 медианани асосидан бошлаб ҳисобланганда учдан бир бўлакка бўлади. Худди шундай мулоҳаза асосида CC_1 медианаси BB_1 медианасини $\frac{1}{3}$ қисмга бўлади,яъни *O* нуқта орқали ўтади. Демак, учбурчакнинг уч медианаси бир нуқтада кесишади ва бу нуқтада ҳар бир медиана асосидан бошлаб ҳисобланганда $\frac{1}{3}$ бўлакка бўлинади, яъни

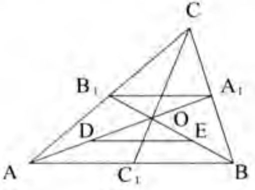
$OA_1=\frac{AA_1}{3}; OB_1=\frac{BB_1}{3}; OC_1=\frac{CC_1}{3}$. Теорема исбот қилинди.

Бундан $AO=\frac{2}{3}AA_1$, $BO=\frac{2}{3}BB_1$, $CO=\frac{2}{3}CC_1$ эканлиги келиб чиқади.

Эслатма. Учбурчакнинг медианалари кесишган нуқта унинг оғирлик маркази деб аталади.



109-расм



110-расм

45-теорема. **Трапециянинг ўрта чизиғи асосларига параллел ва улар йиғиндисининг ярмига тенг.**

Исбот. 108-расмдаги чизмадан фойдаланамиз: $EF\parallel AB$, $EF\parallel DC$ ва $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$ эканлигини исбот қиламиз.

AD томонининг ўртаси бўлган Е нуқта орқали *AB* ва *DC* асосларига параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказсак, *BC* ён томонини *F* нуқтада кесиб ўтади. Фалес теоремаси (42-теорема) бўйича $AE=ED$ бўлганлиги сабабли, $BF=FC$ бўлади. Унда *EF* - трапециянинг ўрта чизиғи бўлади. Юқоридаги ясаш бўйича $EF\parallel AB$, $EF\parallel DC$. Демак, теореманинг биринчи қисми исбот қилинди.

Фалес теоремасининг асосида *O* нуқта ҳам *BD* кесманинг ўртасида ётади. Унда *EO* ва *OF* кесмалари мос ҳолда *ABD*, *BCD* учбурчакларнинг ўрта чизиқлари бўлади: $EO=\frac{1}{2}AB$; $OF=\frac{1}{2}DC$ (43-теорема).

$EF=EO+OF=\frac{1}{2}(AB+CD)$ – теорема тўлиқ исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. ΔABC берилган. *E* - *AC* томонининг ўртаси, *F* - *BC* томонининг ўртаси. Агар: а) AB=12дм бўлса, *EF* ўрта чизиғини; б) EF=4,5 см бўлса, *AB* томонини топинг.
2. Учбурчакнинг томонлари 6 м, 9м, 13м. Унинг ўрта чизиқларидан ҳосил қилинган учбурчак томонларини топинг.
3. Учбурчак берилган, унинг ўрта чизиқларидан ҳосил қилинган учбурчакнинг томонлари 5 дм, 7дм, 10дм. Берилган учбурчакни топинг.
4. Учбурчакнинг периметри 24 м. Шу учбурчак ўрта чизиқларидан ҳосил қилинган учбурчак периметрини топинг.
5. Учбурчакнинг ўрта чизиқларидан ҳосил қилинган учбурчакнинг периметри 15дм. Берилган учбурчакнинг периметрини топинг.
6. Ҳар қандай қавариқ тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исбот қилинг.
7. Учбурчак томонларининг нисбати 4:3:5 нисбатга тенг. Унинг барча томонлари ўрталарини туташтирганда ҳосил бўлган

учбурчакнинг периметри 3,6 дм бўлса, берилган учбурчак периметрини топинг.

8. a тўғри чизиқнинг турли томонларида бўлиб, ундан 12 дм ва 5дм узоқликда ётган A ва B нуқталар берилган. AB кесманинг ўртасидаги Oнуқтадан a тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Кўрсатма. B нуқта орқали a га параллел тўғри чизиқ ўтказиб, унга Aдан ва O нуқтадан перпендикуляр ўтказиш керак.

9. Учбурчак томонларининг ўрталари берилса, бу учбурчакни ясанг.

10. Учбурчакнинг учлари унинг ўрта чизиғи орқали ўтувчи тўғри чизиқдан бир хил узоқликда бўлишини исбот қилинг.

11. Учбурчакнинг ўрта чизиқлари уни тўртта тенг учбурчакларга бўлишини исботланг.

12. Учбурчакнинг бир медианаси 6 м га тенг. Медианалари кесишган нуқтада бу медиана қандай бўлакларга бўлинади?

Кўрсатма. Ҳар қандай учбурчакнинг икки медианаси кесишган нуқтада учларидан бошлаб ҳисоблаганда 2:1 нисбатда бўлинишидан фойдаланинг.

13. Ромб томонларининг ўрталари тўғри тўртбурчак учлари бўлишини исбот қилинг.

14. Тўғри тўртбурчакнинг қарама-қарши томонларини туташтирувчи кесмалар ромбнинг диагоналлари бўлишини исбот қилинг.

15. Трапециянинг асослари 6,4 дм ва 8,6 дм бўлса, унинг ўрта чизиғини топинг.

16. Кесманинг учлари тўғри чизиқдан 18 дм ва 8 дм узоқликда ётади. Кесманинг ўртаси тўғри чизиқдан қандай узоқликда бўлади. Икки ҳолни кўриб чиқинг.

17. Трапеция асосларининг нисбати 2:3га тенг, ўрта чизиғи 24 дм, унинг асосларини топинг.

18. Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг асосларига параллел ва асослари айирмаларининг ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.

19. Трапециянинг ўрта чизиғи 10 м бўлиб, диагонали орқали айирмаси 4 м бўлган икки кесмага бўлинади. Трапециянинг асосларини топинг.

20. Агар трапециянинг диагоналлари унинг ўрта чизиғини учта тенг кесмаларга бўлса, унда трапециянинг асослари нисбатини топинг.

21. Тўғри бурчакли трапеция диагонали орқали икки учбурчакка бўлинади. Уларнинг бири томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак, иккинчиси тўғри бурчакли учбурчак.

Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

22. Тенг ёнли трапециянинг асосидаги ўткир бурчаги 45°, баландлиги *h*, ўрта чизиғи *d* га тенг бўлса, трапециянинг асосларини аниқланг.

23. Тенг ёнли трапециянинг ўтмас бурчагининг учидан туширилган баландлиги унинг катта асосини 3,5 дм ва 8,5 дм узунликдаги кесмаларга бўлади. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

24. Трапециянинг асослари 5,6 м ва 2,4 м. Бу трапециянинг ўрта чизиғини диагоналлардан бири қандай кесмаларга бўлади?

25. Айлана диаметрининг учлари уринмадан 3,4 дм ва 1,2 дм узоқликда. Диаметрнинг узунлигини топинг.

26. Бир асоси, баландлиги ва икки диагонали бўйича трапецияни ясанг. Қайси ҳолда ечим бўлмайди?

V БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Тўртбурчакка таъриф беринг.
2. Қавариқ ва қавариқ эмас тўртбурчаклар фарқини айтинг.
3. Тўртбурчакнинг нечта диагонали бор?
4. Тўртбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси нечага тенг?
5. Параллелограммга таъриф беринг.
6. Параллелограммнинг қандай хоссаларини биласиз?
7. Қавариқ тўртбурчакнинг параллелограмм бўлиш белгиларини айтинг, улар нечта?
8. Фалес теоремаси қандай ифодаланади?
9. Ромбнинг параллелограммдан фарқлаб турувчи қандай хоссасини биласиз?
10. Тўғри тўртбурчакнинг параллелограммдан фарқлаб турувчи қандай хоссасини биласиз?
11. Квадрат тўғри тўртбурчак (ромб) бўла оладими?
12. Учбурчакнинг ўрта чизиғини топинг.
13. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани айтинг.
14. Учбурчак медианаларининг қандай хоссалари бор?
15. Трапециянинг қандай турларини биласиз?
16. Трапециянинг ўрта чизиғи нимага тенг? Унинг қандай хоссаси бор?

V БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Қавариқ тўртбурчакнинг бир бурчаги α. Унинг қаршисидаги бурчаги ундан 9 марта катта, қолган бурчаклари эса 3:7 марта катта бўлса, унинг бурчакларини топинг.

2. Агар қавариқ тўртбурчакнинг барча бурчаклари тенг бўлса, унда бу тўғри тўртбурчак бўлишини исбот қилинг.

3. Параллелограммнинг бир бурчагига биссектриса ўтказилган. Агар параллелограммнинг томонлари 5 см ва 6 см бўлса, бу биссектриса параллелограммнинг катта томонини қандай кесмаларга бўлади?
4. Агар ромб диагоналларининг бири унинг томонига тенг бўлса, унинг бурчакларини топинг.
5. Трапеция диагоналларининг ўрталари ва ён томонларининг ўрталари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.
6. Трапециянинг асослари a ва b берилган. Унинг диагоналлари ўрталарини туташтирувчи кесманинг узунлигини топинг.
7. Трапециянинг ён томони учта тенг бўлакка бўлинган. Бўлиниш нуқталаридан асосларига параллел кесмалар ўтказилган. Агар трапециянинг асослари 4 дм ва 10 дм бўлса, бу кесмаларнинг узунликларини топинг.

   Кўрсатма. Бўлиниш нуқталари орқали иккинчи ён томонига параллел кесмалар ўтказинг.
8. Параллелограмм икки бурчагининг айирмаси 110^0 бўлса, унинг барча бурчакларини топинг.
9. Трапециянинг ўрта чизиғи 7 см, асосларининг бири иккинчисидан 4 смга катта бўлса, унинг асосларини топинг.
10. Тенг ёнли трапецияда: а) диагоналлари; б) асосидаги бурчаклари тенг бўлишини исбот қилинг.

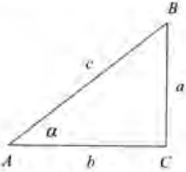
VI БОБ. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКНИНГ ТОМОНЛАРИ ВА БУРЧАКЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШЛАР

26-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАК ТОМОНЛАРИНИНГ НИСБАТИ

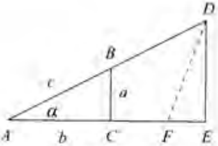
Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишлар геометрияда кўп саволларга жавоб топишда катта аҳамиятга эга.

ABC учбурчак - тўғри бурчакли учбурчак бўлсин (111- расм). Унинг катетларини a, b гипотенузасини c, битта ўткир бурчагини, масалан А бурчагини α (альфа) билан белгилайлик. $\angle C=90^0$ бўлсин. Бу учбурчакнинг томонлари нисбатини кўриб чиқамиз.

Аввал α ўткир бурчагининг косинуси[1] деган тушунчага кўнгил бурайлик.



111-расм



112-расм

Таъриф: Тўғри бурчакли учбурчакнинг α ўткир бурчагига ёпишган катетнинг гипотенузага нисбати шу бурчакнинг косинуси деб аталади. У қисқача

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади.

Бу нисбатнинг аҳамиятли бир ўзгачалигини белгилаб ўтайлик. (1) нисбат α бурчакнинг катталигигагина боғлиқ

---

[1] Лотинча сўз бўлиб, «синусини тўлдирувчи» ёки «синус билан бирга» деган маънода. Қисқача «*cos*» кўринишда ёзилади.

бўлади, у тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари узунликларига боғлиқ эмас. Демак, берилган ўткир бурчак косинуси фақат битта қийматга эга.

***46-теорема.* Берилган бурчакнинг косинуси шу бурчак катталигигагина боғлиқ бўлади.**

Исбот. ABC тўғри бурчакли учбурчак берилсин, унга нисбатан (1) тенглик бажарилади, деб ҳисоблаймиз.

АВ нурга $AD=k\cdot c$ кесмани (112-расм). ACнурга $AE=k\cdot b$ кесмани (k – мусбат сон) ўлчаб қўямиз. Бунда ΔADE тўғри бурчакли учбурчак ва $cos\,\alpha=\frac{AE}{AD}$ бўлишини исбот қиламиз.

Чиндан ҳам, $DE\perp AE$ бўлади. Аксинча, DE кесмаси AE тўғри чизиққа перпендикуляр эмас деб ҳисоблайлик. Унда D нуқтадан AE тўғри чизиққа DF перпендикуляр тушириш мумкин. Натижада ADF тўғри бурчакли учбурчак учун $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ нисбатни ёзишимиз мумкин. (1) тенгликнинг асосида $\frac{b}{c}=\frac{AF}{AD}$ бўлади.

Бироқ, $\frac{AE}{AD}=\frac{k\cdot b}{k\cdot C}=\frac{b}{c}$ ёки $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AD}$ бўлиб қолади. Охирги тенгликдан $AE=AF$ эканлиги келиб чиқади, ёки E ва F нуқта устма-уст тушади ва $DE\perp AE$ ва $\cos\alpha=\frac{AE}{AD}$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

Шундай қилиб, (1) нисбатни ихтиёрий тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги косинуси учун ёзиш мумкин.

Тўғри бурчакли учбурчак томонларининг ҳам қуйидаги икки нисбатини ёзиш мумкин.

Таъриф: Тўғри бурчакли учбурчакнинг α ўткир бурчаги қаршисида ётган катетнинг гипотенузага бўлган нисбати шу бурчакнинг синуси[1] деб аталади ва

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \qquad (2)$$ кўринишида ёзилади.

Таъриф: Тўғри бурчакли учбурчакнинг α ўткир бурчаги қаршисидаги катетнинг унга ёпишган катетига

---

[1] Лотинча сўз бўлиб « эгрилик, эгиш» деган маънони белгилайди, қисқача «*sin*» кўринишда белгиланади.

нисбати шу бурчакнинг тангенси[1] **деб аталади**. Уни

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad (3)$$

кўринишда ёзамиз.

α ўткир бурчакнинг косинуси каби, α бурчакнинг синуси, тангенси ҳам шу бурчак катталигигагина боғлиқ. Демак, ҳар бир α ўткир бурчаги учун $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ ларнинг фақат биттадан қиймати тўғри келади.

Баъзан α бурчакнинг **котангенсини** (лотинча сўз бўлиб, тангенсни тўлдирувчи деган маънони беради) аниқловчи нисбатни ҳам қўлланишга тўғри келади.

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} \qquad (4)$$

Котангенс қисқача «*ctg*» кўринишида ёзилади.

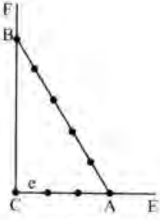
$sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ ларни умумлаштириб, ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари деб атаймиз.

МАШҚЛАР

1. Ўткир бурчагининг косинуси 3:5 нисбатга тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

Ечиш. Изланаётган тўғри бурчакли учбурчак ABC бўлсин: $AB=c$ - гипотенузаси, $\angle C=90^0$, $\angle A=\alpha$; $BC=$; $CA=b$ - катетлари.

Бунда $\cos\alpha = \frac{CA}{AB} = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ бўлиши талаб қилинади. l бирлик кесмани танлаб оламиз. $CE \perp CF$ (113-расм) нурларни ясаймиз. CE нурга $CA=3l$ кесмани қўямиз. A нуқтани марказ қилиб, $AB=5e$ кесмани радиус қилиб, айлана чизсак, у CF нурни B нуқтада кесиб ўтади. Натижада ABC учбурчак ҳосил бўлади. Бу тўғри бурчакли



113-расм

---

[1] Лотинча сўз бўлиб, «уринувчи» деган маънони билдиради. Қисқача «tg» кўринишида ёзилади.

учбурчакда $cos\ \alpha = \frac{CA}{CB} = \frac{3e}{5e} = \frac{3}{5}$ бўлади. Демак, ясалган учбурчак масала шартини қаноатлантиради.

2. Ўткир бурчагининг косинуси: 1) $\frac{3}{4}$ га; 2) $\frac{5}{8}$ га; 3) 0,7га; 4) 0,5га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

3. Ўткир бурчагининг синуси: 1) $\frac{1}{2}$ га; 2) 2:5га; 3) 0,6га тенг бўлса, учбурчакларни ясанг.

4. Ўткир бурчагининг тангенси: 1) $\frac{2}{3}$ га; 2) $\frac{5}{3}$ га; 3) 1га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

5. Ўткир бурчагининг котангенси: 1) $\frac{1}{2}$ га; 2) 1,5га; 3) 0,8га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

6. Ўткир бурчагининг косинуси $\frac{2}{3}$ га тенг, шу бурчак учидан ўтказилган биссектрисаси m га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

7. Агар тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 5 дм, асоси 6дм, баландлиги 4 дм бўлса, асосидаги бурчагининг: а) косинуси; б) синуси; в) тангенси, г) котангенсларини топинг.

8. 7-масалада берилган тенг ёнли учбурчак учидаги бурчаги ярмининг: а) косинусини; б) синусини; в) тангенсини; г) котангенсини топинг.

27-§. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ

Пифагор[1] тўғри бурчакли учбурчак томонларининг орасидаги боғланишни ифодаловчи жуда катта аҳамиятга эга бўлган теоремани кашф этган.

47-теорема (Пифагор теоремаси). **Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлари квадратлари йиғиндисига тенг.**

Исбот. ABC – тўғри бурчакли учбурчак берилсин (114-расм). Юқоридаги белгилашлардан фойдаланамиз ва

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (5)$$

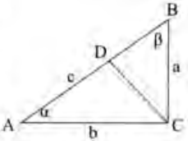
эканлигини исбот қиламиз.

Берилган учбурчакнинг C тўғри бурчаги учидан AB гипотенузага CD перпендикуляр туширсак, иккита тўғри

---

[1] Қадимги грек математиги, э.а 580-500 й.й.

бурчакли учбурчак ҳосил бўлади: ΔACD ва ΔBCD.



114-расм

ABC ва ACD тўғри бурчакли учбурчакларнинг α ўткир бурчаги косинусини ёзамиз (46-теорема):

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ ва } \cos\alpha = \frac{AD}{b};$$

Натижада $\frac{b}{c} = \frac{AD}{b}$ бўлади. Бундан

$$b^2 = c \cdot AD \qquad (x)$$

бўлади.

ABC ва BCD тўғри бурчакли учбурчакларнинг β (бета) ўткир бурчаклари синусларини ёзамиз (46-теорема).

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \text{ ва } \cos\beta = \frac{DB}{a}$$

Натижада $\frac{a}{c} = \frac{DB}{a}$ бўлади. Худди юқоридагидек,

$$a^2 = c \cdot DB \qquad (y)$$

(x) ва *(y)* тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб, $AD + DB = AB = c$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (5)$$

келиб чиқади. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари: а) 4см ва 3 см; б) 0,8 м ва 0,6 м; в) 6дм ва 9,1 дм бўлса, гипотенузасини топинг.
2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 5м, бир катети 3м бўлса, унинг иккинчи катетини топинг.
3. Тўғри бурчакли тўртбурчакнинг томонлари 8 дм ва 6 дм бўлса, унинг диагоналини топинг.
4. Тўғри бурчакли тўртбурчакнинг бир томони 91 см, диагонали 109 см бўлса, унинг иккинчи томонини топинг.
5. Квадратнинг: а) томони a берилган, унинг диагоналини; б) диагонали d берилган, унинг томонини топинг.
6. Ромбнинг диагоналлари: а) 6 м ва 8 м; б) 12см ва 16 см; в) 1 дм ва 2,4 дм бўлса, унинг томонларини топинг.

7. Ромбнинг томони 13дм, a диагоналларининг бири 10 дм бўлса, иккинчи диагоналини топинг.

8. ABC- тўғри бурчакли учбурчак, $\angle C=90^0$, a,b -катетлари, c - гипотенуза, a_1', b_1' - мос катетларнинг гипотенузага туширилган проекциялари. а) $a=\sqrt{a_1c}$; б) $b=\sqrt{b_1c}$ формулалар тўғри бўлишини исбот қилинг.
Кўрсатма: 27 § даги (x), (y) тенгликларидан фойдаланинг.

9. 8-масалада: а) $a=8см; a_1=6,4см$ бўлса, b,c,b_1-ни; б) $b=6$дм, $b_l=3,6$ дм бўлса, a,c,a_1 - ни; в) $a_1=4,2$ м, $b_1=5,8$ м бўлса, a,b,c ларни топинг.

10. p ва q кесмалар берилган. $z=\sqrt{p\cdot q}$ кесмани ясанг.
Кўрсатма: 8 - масалада чиқарилган формуладан фойдаланинг.

11. а) Катетлари; б) катет ва гипотенузаси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

12. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари a ва b берилган. Унга ташқи чизилган айланани ясанг ва унинг радиусини топинг.

13. Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати 4:3 га тенг. Унга ташқи чизилган айлана радиуси 10 см бўлса, тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

14. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонлари 13 м, асоси 10 м бўлса, унинг баландлигини топинг.

15. Тенг томонли учбурчакнинг: а) a томони берилган, m медианасини; б) m медианаси берилган бўлса, унинг томонини топинг.

16. Тенг ёнли трапециянинг асослари 11дм ва 23 дм, ён томони 10 дм бўлса, трапециянинг баландлигини топинг.

17. Тенг ёнли трапециянинг асослари a ва b, ён томони c бўлса, диагоналини топинг.

28-§. АСОСИЙ ТРИГОНОМЕТРИК АЙНИЯТЛАР

α ўткир бурчакнинг ҳар бир қиймати бўйича $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ нинг мос қийматларини аниқлаш мумкин. Шунинг учун уларни юқорида **тригонометрик**[1] функциялар деб атадик.

Биз қуйида фақат α ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари орасидаги боғланишни ифодаловчи айниятларни исбот қиламиз.

1. *ABC* тўғри бурчакли учбурчак берилсин. Пифагор теоремасини ёзамиз.

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (5)$$

26 – §, (1) ва (2) формулалардан

$b=c\cdot\cos\alpha,\ \ a=c\cdot\sin\alpha$ бўлиши маълум.

Бу қийматларни (5)га қўйсак:

$(c\cdot\sin\alpha)^2+(c\cdot\cos\alpha)^2=c^2$, ёки $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (6)
келиб чиқади. Бу α бурчакнинг синуси билан косинуси орасидаги боғланишни берувчи айният.

2. Берилган ўткир бурчакли учбурчак учун

$$tg\alpha=\frac{a}{b} \qquad (3)$$

бўлиши маълум. Бу тенгликка 1-ҳолдаги a ва b нинг қийматларини қўйсак,

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (7)$$

келиб чиқади. Бу ҳам ихтиёрий α ўткир бурчаги учун айният бўлиб ҳисобланади.

3. (6) айниятнинг ҳар бир ҳадини аввал $cos^2\alpha$ га, сўнг $\sin^2\alpha$ бўлиб, натижада қуйидаги икки айниятни ҳосил қиламиз:

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (8)$$

$$1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (9)$$

4. *ABC* тўғри бурчакли учбурчакда $\alpha+\beta=90^0$ бўлиши маълум.
Бундан $\beta=90^0-\alpha$ бўлади. 26– §, (2) формулада $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ ёки $\cos(90^0-\alpha)=\frac{a}{c}$ эканлиги маълум. Натижада

---

[1] Грекча сўз бўлиб, «учбурчак + ўлчов» деган икки сўз бирикмасини билдиради.

$$\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$$

(10)

айниятга эга бўламиз. (α - ўткир бурчак учун).

Ҳудди шундай йўл билан

$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha \qquad (11)$$

айниятни ҳосил қилиш мумкин.

МАШҚЛАР

1. Асосий тригонометрик айниятлардан фойдаланиб, қуйидаги ифодаларни соддалаштиринг:

а) $2+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; б) $\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^3\alpha$;

в) (1-sin α)(1+sin α): г) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\sin\alpha$

2. Ифодани соддалаштиринг:

а) $(1+tg^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^4\alpha}+\sin\alpha$;

б) $(1+ctg^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha+1$

в) $(tg\alpha\cdot ctg\alpha-\cos^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

г) $tg\alpha\cdot ctg\alpha+\sin\alpha$.

3. Ихтиёрий α ўткир бурчаги учун айниятни исбот қилинг:

а) $(2tg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha)\sin\alpha+3\sin\alpha=5\sin\alpha$;

б) $(1+tg^2\alpha)(1+ctg^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

4. α ва β ўткир бурчаклари учун айниятни исбот қилинг:

$$(1+tg^2\alpha)^2-\frac{1}{\cos^4\alpha}+3\cos^2\beta+2\sin^2\beta=2+\cos^2\beta$$

5. α ўткир бурчак учун:
а) $tg(90^0-\alpha)=ctg\alpha$; б) $ctg(90^0-\alpha)=tg\alpha$ бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма: $\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$ айниятидан фойдаланинг.

6. Агар α ўткир бурчаги учун: 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{60}{61}$;

3) $\cos\alpha=0.8$ бўлса, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ларни топинг.

7. Агар α ўткир бурчаги учун:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$; 3) $\sin\alpha=0.6$ бўлса, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ларни топинг.

29-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ АЙРИМ ҚИЙМАТЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ

Жадвал ёки ҳисоблаш асбобларидан фойдаланмай туриб, ўткир бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенсини ҳисоблаш мумкин. Биз қуйида шундай ҳисоблашларнинг айрим ҳолларини кўрсатиб ўтамиз. Бунинг учун бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенси таърифларидан, геометриядаги аниқ теоремалардан ва 28-§ даги айрим айниятлардан фойдаланамиз.

1. *ABC* тўғри бурчакли учбурчак берилган бўлсин. Унда $\alpha=30^0$ бўлса, $\sin 30^0$, $\cos 30^0$, $\operatorname{tg} 30^0$ қийматларини ҳисоблаймиз.

Тўғри бурчакли учбурчакда 30^0 бурчак қаршисида ётган катет гипотенуза ярмига тенг бўлиши маълум. Унда $a=\frac{c}{2}$ бўлади. Бироқ 26 - § (2) формуладаги $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ эканлигидан фойдалансак, унда $\sin 30^0=\frac{1}{2}$ бўлади.

Пифагор теоремасидан фойдалансак, $a^2+b^2=c^2$ (5) бўлиши маълум. $\alpha=30^0$ бўлганда (5) формулалардан $\left(\frac{c}{2}\right)^2+b^2=c^2$ ёки $\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{3}{4}$, бундан $\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлади. Демак, $\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ бўлади.

tg=30^0 қийматини ҳисоблаш қулай. 28 -§даги (7) айниятдан фойдалансак, $tg30^0=\frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $tg30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлади.

2. *ABC* тўғри бурчакли учбурчакда $\alpha=60^0$ бўлсин. $\sin60^0$, $\cos60^0$, $tg60^0$ қийматларини ҳисоблаймиз.

Бунинг учун 28 - §даги (10), (11) айниятлардан ва 1-ҳолда ҳисобланган қийматлардан фойдаланамиз.

$$\sin 60^0 = \sin(90^0 - 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ҳудди шунга ўхшаш ҳисобласак, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ бўлади. Унда

$tg60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \sqrt{3}$ ёки $tg60^0 = \sqrt{3}$ бўлади.

3. *ABC* тўғри бурчакли учбурчакда $\alpha=45^0$ бўлган ҳолни кўриб чиқайлик. $\sin45^0$, $\cos 45^0$, $tg45^0$, қийматларини ҳисоблашга тўхталиб ўтайлик. Бунда $a=b$ бўлиши тушунарли. Пифагор теоремасидан фойдалансак, $a^2+b^2=c^2$ ёки $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлади.

Унда $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ қийматга эга бўламиз. У ҳолда $tg45^0=1$ бўлади.

Юқоридагидай мулоҳазаларни юргизиб, $\sin0^0$, $\cos0^0$, $tg0^0$, $\sin90^0$, $\cos 90^0$ қийматларини мустақил ҳисобланг. Нима учун $tg90^0$ қийматга эга бўлмайди? Тушунтириб беринг.

МАШҚЛАР

1. Математик жадвал ва микрокалькулятор ёрдамисиз тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги $\alpha=0^0$ бўлганда $\sin0^0=0$; $\cos0^0=1$; $tg0^0=0$ бўлишини исбот қилинг.
2. $\sin90^0=1$ва $\cos90^0=0$ бўлишини қандай қилиб тушунтириш мумкин?
3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг 60^0 ли бурчагининг косинуси, синуси, тангенси ва котангенсини икки усул билан ҳисобланг: 1) томонларининг боғлиқлигидан фойдаланинг; 2) 30^0 бурчакнинг қийматларидан фойдаланиб, (90^0-30^0) айирма қийматининг синуси, косинуси, тангенси, котангенсини ифодаловчи айниятдан фойдаланинг.
4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг хоссасидан фойдаланиб, 45^0 бурчакнинг косинуси, синуси, тангенси, котангенси қийматларини ҳисобланг.
5. Агар: а) $\alpha=30^0$; б) $\alpha=60^0$ бўлса, $(1-\cos^2\alpha)\sin^2\alpha - \sin^4\alpha + \sin\alpha$ ифоданинг қийматини топинг.

6. Агар $\alpha=45^0$ бўлса, $\frac{(tg^2\alpha+1)\cdot cos^2\alpha}{1+tg\,\alpha}+\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}$ ифодаиинг қийматини топинг.

7. Ифоданинг қийматини топинг.

а) $tg30^0\cdot\cos30^0\cdot\sin30^0\cdot tg45^0\cdot tg60^0$;

б) $\cos^2 30^0+\sin^2 30^0-\cos^2 60^0-\sin^2 60^0+\cos^2 45^0+\sin^2 45^0$

30-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

30.1. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҚИЙМАТЛАРИНИ ЖАДВАЛ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Юқорида 30^0, 45^0, 60^0 бурчакларнинг тригонометрик функциялари қийматларини ҳисоблаш мумкин эканлигини кўрдик.

Бироқ, барча бурчакларнинг тригонометрик қийматларини юқоридаги йўл билан ҳисоблаб бўлмайди. Шунинг учун айрим ҳолларда жадваллардан фойдаланилади.

Масалан, В.М. Брадиснинг «Тўрт хонали математик жадвал»ларида ўткир бурчак тригонометрик функцияларининг қийматлари берилган. sin $38^0 30'$ қийматини жадвалдан топиш учун синуслар жадвалининг чап томонидаги «градуслар» устунчасидан 38 сонини, юқоридаги «минутлар» қаторидан 30 сонини топамиз. Уларнинг кесишган жойида 0,6225 сони ёзилган. Демак, sin $38^0 30'$=0.6225 бўлади. Қолган тригонометрик функцияларнинг қийматларини ҳам худди шу йўл билан топилади. Айрим ҳолларда минутларга нисбатан тўғрилашларни бажаришга тўғри келади. Бу ҳақдаги қўшимча маълумотлар жадвалда ифодаланган.

Айрим ҳолларда tg α =0,4663 қиймати бўйича α бурчакнинг қийматини топиш талаб қилинади. Тангенслар жадвалидан 0,4663 сонини излаймиз. Бу соннинг чап томонидаги устунчадан 25 сони топилади. Демак, $\alpha=25^0$ бўлади.

МАШҚЛАР

1. Тўрт хонали математик жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги бурчакларнинг синусларини ва косинуслари қийматларини топинг: 1) 35^0; 2) $18^0 36'$; 3) $40^0 56'$;4) 75^0; 5) $85^0 12'$.

2. Тўрт хонали математик жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги бурчакларнинг тангенслари ва котангенсларини топинг:

1) $20^0 30'$; 2) 35^0; 3) $40^0 15'$; 4) 58^0; 5) $80^0 45'$.

3. $\alpha=30^0$; 45^0; 60^0 бўлганда ҳисобланган тригонометрик функцияларнинг юқоридаги қийматларини (29 -§) уларнинг жадвалдаги қийматлари билан таққосланг.

4. а) $\sin 37^0$ ва $\cos 53^0$; $\mathrm{tg} 48^0 36'$ ва $\mathrm{ctg}\ 41^0 24'$ қийматларини таққосланг. Фарқларини кўрсатинг.

5. Жадвалдан фойдаланиб: а) $\sin 40^0$ ва $\sin 70^0$; $\cos 20^0$ ва $\cos 60^0$; $\mathrm{tg} 30^0$ ва $\mathrm{tg}\ 45^0$ қийматларининг қайси бири катта эканлигини аниқланг. Қандай хулоса чиқариш мумкин?

6. Жадвалдан фойдаланиб, α ўткир бурчакнинг қийматини топинг:

а) $\sin\alpha=0.9397$; б) $\sin\alpha=0,4163$; в) $\cos\alpha=0,9613$;
г) $\cos\alpha=0,3333$; д) $\mathrm{tg}\alpha=0,1763$; е) $\mathrm{tg}\ \alpha=1,213$.

30.2. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОР ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини ҳисоблашда, тўғри бурчакли учбурчакларни ечишда микрокалькуляторлардан фойдаланиш қулай. У ҳисоблашни анча енгиллаштиради. Микрокалькуляторлардан ҳисоблашда қандай қўлланиш кераклиги махсус услубий қўлланмаларда тўлиқ ифодаланган.

1. Қийматларни ҳисобланг: 1) $\sin 15^0$; 2) $\sin 30^0$; 3) $\sin 40^0 30'$; 4) $\sin 60,8^0$ 5) $\sin 75,25^0$.

2. Қийматларини ҳисобланг: 1) $\cos 22^0$; 2) $\cos 37^0$; 3) $\cos 47^0 30'$; 4) $\cos 67,5^0$; 5) $\cos 80,16^0$.

3. Гипотенузаси с, ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг a ва b катетлари $a = c \sin\alpha$ ва $b = c \cos\alpha$ формулалари орқали аниқланиши маълум. Агар: а) $c=7$; $\alpha=48^0$; б) $c=41,5$; $\alpha=61,5^0$; в) $c=10,74$; $\alpha=11^0 45'$ бўлса, унда учбурчакнинг ҳар бир катетини топинг.

30.3. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг тригонометрик функцияларининг аниқланиши, улар орасидаги айниятлар, Пифагор теоремаси учбурчакларни ечишни анча енгиллаштиради. Масалан, тўғри бурчакли учбурчакнинг икки элементи берилган ҳолда унинг қолган элементларини осонгина аниқлаш мумкин. Бунда тўрт ҳол бўлиши мумкин.

1. a ва b катетлари берилган. c гипотенузасининг α, β

ўткир бурчакларини топиш талаб қилинсин. Уларни $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=90^0-\alpha$ формулаларидан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин.

2. Гипотенузаси, a катети берилган. Номаълум элементлари $\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $\beta=90^0-\alpha$; $b=c\cdot\cos\alpha$ формулалари ёрдамида топилади.

3. a катети ва α ўткир бурчаги берилган. Номаълум элементлар қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$c=\frac{a}{\sin\alpha};\ \beta=90^0-\alpha;\ b=c\cdot\cos\alpha.$$

4. c гипотенузаси ва α ўткир бурчаги берилган. Қолган элементларини қуйидаги формулалар орқали ҳисоблаш мумкин:

$$a=c\cdot\sin\alpha;;\ b=c\cdot\cos\alpha;\ \beta=90^0-\alpha.$$

Қуйида тўғри бурчакли учбурчакларнинг берилган икки элементи бўйича қолган элементларини топишга доир масалалар берилган:

1. a ва b катетлари берилган: а) $a=8, b=6$; $a=30, b=40$; б) $a=4{,}35$; $b=1.45$ г) $a=12{,}3$; $b=61{,}5$. Гипотенузани ва унинг ўткир бурчакларини топинг.

2. c гипотенузаси ва a (ёки b) катети берилган: а) $c=10$; $a=6$; б) $c=65$; $b=63$; в) $c=6{,}97$; $a=5{,}28$; г) $c=17{,}1$; $b=8{,}23$. Номаълум катет ва бурчакларини топинг.

3. a (ёки b) катети ва унинг қаршисида ётган α (ёки β) бурчаги берилган: а) $a=15$; $\alpha=36{,}5^0$; б) $a=3{,}8$; $\alpha=42^015'$; в) $b=6{,}4$; $\alpha=56^0$; г) $b=12$, $\alpha=18{,}6^0$ бўлса, учбурчакнинг гипотенузасини, берилган катетга ёпишган ўткир бурчагини ва иккинчи катетини топинг.

4. a (ёки b) катети ва унга ёпишган β (ёки α) ўткир бурчаги берилган: а) $a=52{,}5$; $\beta=35^036'$; б) $a=420$, $\beta=24{,}8^0$; в) $b=75$; $\alpha=51^015'$; г) $b=5{,}85$; $\alpha=61{,}25^0$ бўлса, учбурчакнинг гипотенузасини, берилган катет қаршисидаги ўткир бурчагини ва иккинчи катетини топинг.

5. c гипотенуза ва α (ёки β) бурчаги берилган: а) $c=10$; $\alpha=36{,}5^0$; б) $c=42{,}6$; $\alpha=52^024'$; в) $c=1{,}75$; $\beta=73^0$; г) $c=0{,}8$; $\beta=48^015'$ бўлса, учбурчакнинг катетларини ва номаълум бурчагини топинг.

6. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 6,8 м, асоси 20,4 м бўлса, учбурчакнинг ён томонларини ва унинг бурчакларини топинг.

7. Ромбнинг: а) диагоналлари 12 см ва 8 см; б) томони 24,1м, баландлиги 12 м бўлса, унинг бурчакларини топинг.

8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг диагонали 8,2м бўлиб, томонларининг бири билан $58,5^0$ бурчак ҳосил қилса, учбурчакнинг томонларини топинг.

VI БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Ўткир бурчакнинг косинуси, синуси ва тангенсига таъриф беринг.

2. Пифагор теоремаси қандай айтилади? Қандай исбот қилинади?

3. Ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматлари нимага боғлиқ бўлади?

4. Қандай асосий тригонометрик айниятларни биласиз?

5. $\alpha=30^0; 45^0; 60^0$ бўлганда, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ларнинг қийматлари нимага тенг?

6. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг: 1) катетлари; 2) гипотенузаси ва бир катети; 3) катети ва бир ўткир бурчаги; 4) гипотенузаси ва бир ўткир бурчаги берилса, қолган элементларини қандай топиш мумкин?

VI БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчакда: 1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=1$ бўлса, $\sin\alpha$ нинг қийматини топинг.

2. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ бўлса, $\sin\alpha$ нинг қийматини топинг.

3. Ифодани соддалаштиринг.1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$;
2) $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$;

3) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

4. Агар: 1) $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $tg\alpha=\sqrt{3}$ бўлса, α бурчакни топинг.

5. Жадвалдан фойдаланмасдан, $\sin30^0+\cos60^0$ ифоданинг қийматини топинг.

6. $\cos 70^0=\sin 20^0$ бўлишини исбот қилинг.

7. Жадвалдан фойдаланмай туриб, $\operatorname{tg}45^0+\sin^2 17^0+\cos^2 17^0$ ифода қийматини топинг.

8. Агар ромбнинг диагоналлари 4,6 м ва 64,4 м бўлса, унинг томонларини топинг.

9. Тўғри бурчакли учбурчакда: а) a = 9дм, b =12 дм берилган, c, h, a_1, b_1 ларни (бунда a_1 *ва* b_1 - катетларнинг гипотенузага туширилган проекциялар) топинг; б) a = 1,2 дм, c = 1,3 дм берилган, b, h, a_1, b_1 ларни топинг.

10. Радиуслари 6м ва 2 м бўлган икки айлананинг марказлари орасидаги масофа 10м. а) ташқи умумий уринманинг; б) ички умумий уринма кесмасининг узунлигини топинг.

VII БОБ. КЎПБУРЧАКЛАР

31– §. ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАКЛАР

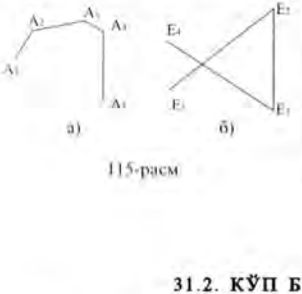
31.1. СИНИҚ ЧИЗИҚЛАР

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ $(n>2)$ нуқталардан ва уларни кетма-кет туташтирувчи $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... A_{n-1}A_n$ кесмаларидан иборат фигурани A_1 A_2...A_n **синиқ чизиғи** деб атаймиз. A_1, A_2, ..., A_n нуқталар синиқ чизиқнинг учлари, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмалар эса синиқ чизиқнинг бўғинлари деб аталади.

Кетма-кет, қўшни бўлган ҳар бир икки буғиннинг умумий нуқталари синиқ чизиқнинг учлари бўлади.

Синиқ чизиқлар турлича бўлиши мумкин.

Агар синиқ чизиқнинг бўғинлари кесишмаса ва унинг қўшни бўғинлари бир тўғри чизиқда ётмаса, унда бу синиқ чизиқ содда синиқ чизиқ деб аталади. Масалан, 115-расмда $A_1A_2A_3A_4A_5$ содда синиқ чизиқ, $E_1E_2E_3E_4$ содда бўлмаган синиқ чизиқ берилган.



а) б)

115-расм

Синиқ чизиқнинг барча буғинлари узунликларининг йиғиндиси **синиқ чизиқнинг узунлиги** дейилади.

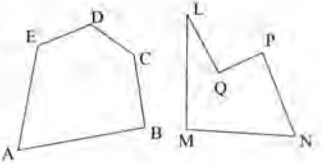
Агар синиқ чизиқнинг учларини кесма билан туташтирсак, ёпиқ синиқ чизиққа эга бўламиз.

31.2. КЎП БУРЧАКЛАР

$A_1A_2A_3...A_n$ $(n>2)$ ёпиқ синиқ чизиқ билан чегараланган текисликнинг қисми **кўпбурчак** деб аталади. $A_1, A_2, ..., A_n$ нуқталар кўпбурчакнинг учлари; A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмалар кўп бурчакнинг томонлари бўлади. Кўпбурчакнинг бир томонига тегишли учлари қўшни бўлган учлари, умумий учга эга бўлган икки томони қўшни томонлари деб аталади.

Кўпбурчаклар учлари ёки томонлари сонига қараб номланади. Масалан, учбурчак, тўртбурчак, бешбурчак ва бошқалар.

Кўпбурчак ва бошқалар томонлари узунликлари йиғиндиси унинг **периметри** деб аталади.



116-расм

Содда ёпиқ синиқ чизиқ билан чегараланган кўпбурчакни содда кўпбурчак деб атаймиз. Содда кўпбурчаклар эса ўз навбатида уларни чегаралаб турувчи ёпиқ синиқ чизиққа нисбатан икки хил бўлади: қавариқ ва қавариқ эмас. Кўпбурчакнинг ихтиёрий томони орқали тўғри чизиқ ўтказилганда, бу кўпбурчак шу тўғри чизиқ орқали аниқланган ярим текисликларнинг фақат биттасида ётса, у ҳолда бу кўп бурчак қавариқ кўпбурчак дейилади, акс ҳолда иккала ярим текисликда ҳам ётса, унда бу кўпбурчак қавариқ бўлмаган кўпбурчак бўлади.

Масалан, 116-расмда *ABCDE* - қавариқ, *MNPQL* - қавариқ эмас кўпбурчак.

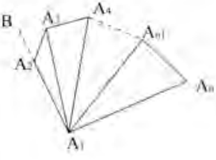
31.3. ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАКЛАР

Қавариқ кўпбурчак текисликни икки қисмга бўлади: ички ва ташқи.

Томонларининг сони энг оз бўлган қавариқ кўпбурчак бу - учбурчак. Учларининг (томонларининг) сони n га тенг бўлган қавариқ кўпбурчакни n бурчак деб атаймиз.

Қўшни бўлмаган икки учини туташтирувчи кесма кўп бурчакнинг диагонали дейилади. A_1 учидан чиқувчи диагоналлар A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, ..., A_1A_{n-1} бўлади (бошқа учлари орқали ҳам худди шундай диагоналлар ўтказиш мумкин).

Демак, n бурчакнинг бир учидан чиқувчи диагоналлар сони n-3 га тенг бўлади. Унда n бурчакда ҳаммаси бўлиб $n(n$-$3)$ диагонал бўлиши керак эди, бироқ ҳар бир диагоналда n бурчакнинг икки учи ётганлиги сабабли, умумий диагоналлар сони $\frac{1}{2}n(n-3)$ га тенг бўлади.



117-расм

Кўпбурчакнинг бир учидан чиқувчи икки томони орасидаги бурчаги унинг ички бурчаги деб аталади. Улар: $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$,..., $\angle A_nA_1A_2$. Кўп бурчакнинг ички бурчагига қўшни бўлган бурчак кўпбурчакнинг ташқи бурчаги деб аталади.

Унда $\angle A_1A_2A_3$ бурчагига нисбатан $\angle A_3A_2B$ ташқи бурчак бўлиб ҳисобланади.

МАШҚЛАР

1. Бўғинларнинг сони бешга тенг бўлган содда ва содда эмас синиқ чизиқларни чизинг.

2. Агар *ABCDE* содда синиқ чизиқнинг ҳар бир бўғини 3 см бўлса, у ҳолда синиқ чизиқнинг узунлигини топинг.

3. *KLMN* содда синиқ чизиқ берилган. Унинг узунлиги *KN* кесма узунлигидан катта бўлишини исбот қилинг.

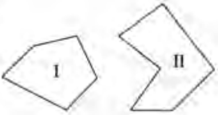
4. 118-расмда икки кўпбурчак берилган (I ва II). Ҳар бири неча бурчакли? Қайсиниси қавариқ, қайси бири қавариқ эмас? Нима учун?

5. *ABCDEF* қавариқ олтибурчакни чизинг. Унинг барча учлари, томонлари, бурчаклари ва диагоналларини айтинг. Ҳар бирини белгилаб ёзинг. Нечта учи, томони, бурчаги ва диагонали бор?

6. а) Бешбурчакка; б) саккизбурчакка; в) *n* бурчакка бир учидан чиқувчи қанча диагонал чизиш мумкин?

7. а) Олтибурчакка; б) тўққизбурчакка; в) йигирма бурчакка бир учидан чиқувчи диагоналлар орқали нечта учбурчак ясаш мумкин?

8. а) Бешбурчакнинг;
б) саккизбурчакнинг;
в) *n* бурчакнинг ҳар бирига ҳаммаси бўлиб нечта диагонал ясаш мумкин?



118-расм

32-§. ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАК ИЧКИБУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ

$A_1A_2...A_n$ қавариқ кўпбурчак берилсин (117-расм).

48-теорема. **Қавариқ *n* бурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси 180° (*n* -2)га тенг.**

Исбот. Берилган *n* бурчакни 117-расмда кўрсатилгандай қилиб, диагоналлар орқали учбурчакларга бўламиз. Бундай учбурчаклар сони *n* -2 бўлади. Бўлинган учбурчаклар ички бурчакларининг йиғиндиси кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисига тенг. Ҳар бир учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180^0га тенг. У ҳолда кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180^0 (n-2)га тенг. Теорема исбот қилинди.

Натижа. Қавариқ кўпбурчакнинг ташқи бурчакларининг йиғиндиси 360^0га тенг.

n бурчакнинг ҳар бир учидаги ички бурчаги билан ташқи бурчаги йиғиндиси 180^0ни ташқил қилади. Демак, n бурчакнинг барча ички бурчакларининг ва ташқи бурчакларининг йиғиндиси 180^0 n га тенг. Унда

$$180^0 \cdot n - 180^0(n-2) = 360^0$$

ташқи бурчаклар йиғиндисига тенг. Демак, n бурчакнинг ташқи бурчакларининг йиғиндиси n сонига боғлиқ бўлмайди.

МАШҚЛАР

1. а) Бешбурчакнинг; б) саккизбурчакнинг; в) йигирмабурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисини топинг.

2. Агар олтибурчакнинг бурчаклари катталигининг нисбати 3,5:2:3:4:2,5:3 га тенг бўлса, унинг ҳар бир бурчагини топинг.

3. Агар кўпбурчак томонлари сонини учга кўпайтирсак, унда кўпбурчак ички бурчаклари йиғиндиси қандай ўзгаришини ҳисобланг.

4. Агар кўпбурчақнинг ички бурчаклари йиғиндиси: а) 540^0га; б) 906^0га; в) 3600^0га тенг бўлса, унинг томонлари сонини топинг.

5. Агар кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси унинг ташқи бурчаклари йиғиндисидан k марта катта бўлса, кўпбурчак томонлари сонини топинг.

33-§. МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАР

Таъриф: Агар қавариқ кўпбурчакнинг барча томонлари тенг бўлса ва барча бурчаклари тенг бўлса, унда бу кўпбурчак мунтазам кўпбурчак деб аталади.

Умумий ҳолда қавариқ кўпбурчакнинг элементлари қандай аниқланса, мунтазам кўпбурчакда ҳам худди ўша тушунчалар, белгилашлар сақланиб қолади. Мунтазам кўпбурчакларнинг соддалари бўлиб тенг томонли учбурчак, квадрат ҳисобланади.

$A_1A_2...A_n$ мунтазам кўпбурчак бўлса, унда n томонли мунтазам кўпбурчак берилган деб айтилади. Демак, мунтазам кўпбурчак томонларининг сонига ёки учларининг сонига қараб номланади.

Мунтазам n бурчакда $n=3$ бўлганда - мунтазам (тенг томонли) учбурчак, $n=4$ бўлганда - мунтазам тўртбурчак (квадрат), $n=5$ бўлганда - мунтазам бешбурчак ва ҳ.к. деб аталади.

Мунтазам n бурчакнинг бир томонини a_n орқали белгиласак, унинг барча томонлари тенг бўлганлиги сабабли унинг периметри

$$P_n = n \cdot a_n$$

бўлади (P_n - мунтазам n бурчакнинг периметри).

Қавариқ n бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $180^0(n-2)$ бўлиши маълум. Мунтазам n бурчакнинг барча бурчаклари тенг бўлганлиги сабабли унинг ҳар бир бурчаги

$$\frac{180^0\,(\mathrm{n}-2)}{n} \text{ га}$$

тенг бўлади, ташқи бурчаклари эса

$$\frac{360^0}{n} \text{ га}$$

тенг бўлиши тушунарли (32- §).

Баъзида юлдузчага ўхшаш мунтазам кўпбурчаклар ҳам учраб туради. Бироқ, улар қавариқ кўпбурчак бўла олмайди. Биз уларга алоҳида тўхталиб ўтмаймиз.

Икки мунтазам n бурчакнинг томонлари тенг бўлса, у ҳолда бу икки мунтазам n бурчаклар **тенг** дейилади.

$A_1A_2...A_n$. $B_1B_2...B_n$ мунтазам n бурчакларни мос ҳолда Q_1 ва Q_2 орқали белгилайлик. Агар $A_1A_2 = B_1B_2$ бўлса, у ҳолда $Q_1=Q_2$ бўлади. Чиндан ҳам уларни мос келадиган қилиб устма-уст қўйиш мумкин.

Q_2 кўпбурчаги A_1A_2 тўғри чизиқ орқали аниқланган ярим текисликларнинг бирида ётади. A_1A_2 тўғри чизиққа A нуқтадан бошлаб $B_1B_2=A_1A_2$ бўладиган қилиб кесмани қўшиш мумкин. Унда B_1 нуқта A_1 нуқтага, B_2 нуқта A_2 нуқтага устма-уст тушади. Сўнг Q кўпбурчак ётган ярим текисликда $\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$ бўладиган қилиб, A_2A_3 нурни чизамиз ва унга A_2 нуқтадан бошлаб B_2B_3 кесмани ўлчаб қўямиз. Мунтазам кўпбурчакларнинг бурчаклари тенг бўлганлиги сабабли, $A_2A_3=B_2B_3$ бўлади ёки A_3 ва B_3 учлари устма-уст тушади. Худди шундай йўл билан Q_2 кўп бурчагининг қолган учларини ҳам устма-уст қўйиш мумкин. Демак, $Q_1=Q_2$ бўлади.

Агар ҳар қандай иккита мунтазам n бурчак томонларининг сони бир хил, лекин узунликлари тенг бўлмаса, уларни бир хил номли кўпбурчаклар деб атаймиз. Уларга кўп мисоллар келтириш мумкин.

МАШҚЛАР

1. Томонларининг сони энг оз бўлган мунтазам кўпбурчакни айтинг. Унинг бир бурчаги неча градусга тенг.
2. Томони a га тенг бўлган мунтазам: а) 7; б) 12; в) n бурчакнинг периметрини топинг.
3. Мунтазам 6 бурчак берилган. Унинг: 1) ички бурчакларининг йиғиндисини; 2) ҳар бир бурчагини; 3) ҳар бир учидаги ташқи бурчагини; 4) ташқи бурчакларининг йиғиндисини; 5) бир учидан чиқувчи диагоналлар сонини; 6) барча диагоналлари сонини; 7) периметри 24,6 дм бўлса, унинг бир томонини ҳисобланг.
4. Агар кўпбурчакнинг ҳар бир ички бурчаги: 1) 140^0; 2) 150^0; 3) 168^0 бўлса, унинг томонлари сонини топинг.
5. Агар мунтазам кўпбурчакнинг ташқи бурчакларининг бири: 1) 18^0; 2) 12^0; 3) 30^0га тенг бўлса, унинг томонлари сонини топинг.
6. Мунтазам: 1) 4; 2) 5; 3)10; 4) 12 бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисини топинг.
7. 6-масалада берилган кўпбурчакларнинг ҳар бирининг бурчагини ҳисобланг.
8. 6-масалада берилган кўпбурчакларнинг ҳар бирига нечтадан диагонал ўтказиш мумкин?

34-§. АЙЛАНАГА ИЧКИ (ТАШҚИ) ЧИЗИЛГАН КЎПБУРЧАКЛАР

Агар қавариқ кўпбурчакнинг барча учлари бир айланада ётса, унда бу кўпбурчак айланага **ички чизилган** деб аталади.

Агар айлана қавариқ кўпбурчакларнинг ҳамма томонларига уриниб ўтса, унда бу кўпбурчак айланага **ташқи чизилган** айлана деб аталади. Демак, кўпбурчак айланага ички чизилганда ёки айлана кўпбурчакка ташқи чизилганда кўпбурчакнинг барча учлари айлана марказидан бир хил узоқликда бўлади, айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг барча томонлари эса айлана марказидан бир хил узоқликда бўлади.

34.1. АЙЛАНАГА ИЧКИ (ТАШҚИ) ЧИЗИЛГАН ТЎРТБУРЧАКЛАР

Ҳар қандай учбурчакка ташқи (ички) чизилган айланалар мавжудлиги маълум (20-§). Ҳар қандай қавариқ тўрт бурчакка ташқи (ички) чизилган айланалар доим ҳам мавжудми, деган саволга жавоб беришга тўғри келади. Текшириб кўрилса, барча қавариқ тўртбурчакка ҳар доим ҳам ички (ташқи) чизилган айланалар чизиш мумкин эмас экан. Бу саволларга қуйидаги теоремалар жавоб беради.

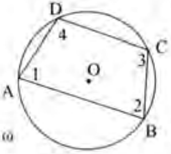
49-теорема. **Агар айлана қавариқ тўртбурчакка ташқи чизилган бўлса, унда тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180^0га тенг бўлади.**

Исбот. *ABCD* тўртбурчак ва унга ташқи чизилган $\omega(O,R)$ айлана берилган бўлсин(119-расм). $\angle 1+\angle 3=180^0$; $\angle 2+\angle 4=180^0$ бўлишини исбот қиламиз. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ бурчаклари айланага ички чизилган бурчаклар $\angle 1$ бурчаги $\overset{\cup}{BCD}$ ёйнинг, $\angle 3$ бурчаги $\overset{\cup}{DAB}$ ёйнинг ярми билан ўлчанади.

$$\angle 1+\angle 3=\frac{\overset{\cup}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\cup}{BCD}+\overset{\cup}{DAB}}{2}=\frac{360^0}{2}=180^0$$

$$\angle 2+\angle 4=180^0$$

бўлиши ҳам худди шундай исбот қилинади.



119-расм

50- теорема (49-теоремага тескари). **Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180^0 бўлса, унда бу тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин.**

Бу теорема исботига тўхталиб ўтмаймиз.

51-теорема. **Айланага ташқи чизилган қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонларининг йиғиндилари тенг бўлади.**

Айланадан четда ётган нуқтадан айланага ўтказилган уринмалар кесмаларининг тенглигидан фойдаланиб, теоремани осонгина исбот қилиш мумкин.

52-теорема (51 - теоремага тескари). **Агар қавариқ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонларининг йиғиндилари тенг бўлса, у ҳолда унга ички айлана чизиш мумкин.**

Бу теоремани мустақил исбот қилинг.

Қавариқ тўртбурчакка ташқи чизилган айланалар ҳақидаги теоремаларнинг (49-52 - теоремалар) асосида қуйидагиларни айтиш мумкин.

а) Параллелограммга (тўғри тўртбурчакдан ташқари) ташқи ҳам, ички ҳам айлана чизиш мумкин эмас. Чунки унинг қарама-қарши томонларининг йиғиндиси 180^0га тенг эмас. Лекин ромбга доимо ички айлана чизиш мумкин. Чунки унинг қарама-қарши томонлари йиғиндилари тенг;

б) Ромбга (квадратдан фарқли) ташқи айлана чизиб бўлмайди, чунки унинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180^0га тенг эмас;

в) Тўғри тўртбурчакка (квадратдан фарқли) ташқи айлана чизиш мумкин, чунки унинг қарама-қарши бурчакларнинг йиғиндиси 180^0га тенг, лекин ички айлана чизиш мумкин эмас, чунки унинг қарама-қарши томонлари йиғиндилари тенг эмас.

г) Квадратга ташқи ҳам, ички ҳам айлана чизиш мумкин, чунки юқоридаги талаблар бажарилади.

Ҳамма ҳолларда ички (ташқи) айлананинг марказлари мос тўртбурчаклар диагоналлари кесишган нуқтада ётади.

МАШҚЛАР

1. Берилган айланада AC ва BD диаметрлар бир-бирига перпендикуляр. Агар: 1) A,B,C,D нуқталарни кетма-кет туташтирсак, унда берилган айланага нисбатан қандай тўртбурчак ҳосил бўлади? 2) A,B,C,D нуқталар орқали берилган айланага уринмалар ўтказсак, уларнинг кесишиш нуқталаридан ҳосил бўлган $A'B'C'D'$ тўртбурчак берилган айланага нисбатан қандай тўртбурчак бўлади?

2. Тўғри тўртбурчак берилган. Унга ташқи чизилган айлана ясанг.

3. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони a га, диагоналлари орасидаги ўткир бурчаги 60^0га тенг бўлса, унга ташқи чизилган айлана диаметрини топинг.

4. Берилган ромбга ички чизилган айланани ясанг.

5. Ромбнинг томони 10м, ўткир бурчаги 30^0 бўлса, ромбга ички чизилган айлана радиусини топинг.

6. Агар тўртбурчак айланага: а) ички чизилган бўлса, унинг қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180^0га тенг бўлишини; б) ташқи чизилган бўлса, унинг қарама-қарши томонларининг йиғиндиси тенг бўлишини исбот қилинг.

7. 6-масаланинг ҳар бир қисми учун тескари масалани ифодаланг ва уларни исбот қилинг.

8. Агар трапеция айланага ички чизилса, унда бу трапеция тенг ёнли бўлишини исбот қилинг.

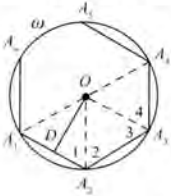
9. Тўртбурчак бурчакларининг нисбати навбати билан: 1) 4:2:5:7 га; 2) 3:4:5:11 га тенг бўлса, унда бу тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинми?

10. Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг учта томонининг нисбати 4:5:7 тенг. Агар тўртбурчакнинг периметри 44м бўлса, унинг томонларини топинг.

34.2. АЙЛАНАГА ИЧКИ (ТАШҚИ) ЧИЗИЛГАН МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАР

Энди айланага ташқи (ички) чизилган мунтазам кўпбурчакларга тўхталиб ўтамиз.

53-теорема. **Ҳар қандай мунтазам кўпбурчакка ташқи ва ички айлана чизиш мумкин.**



120-расм

Исбот. $A_1A_2...A_n$ мунтазам кўпбурчак берилсин (120-расм). Аввал бу мунтазам кўпбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини ёки кўпбурчакнинг ҳар бир учидан бир хил узоқликда ётган нуқтани топиш мумкинлигини исбот қиламиз. $\angle A_1A_2A_3$ ва $\angle A_2A_3A_4$ бурчакларига биссектрисалар ўтказамиз. Улар О нуқтада кесишади, чунки $\angle 2+\angle 3<180^0$. Мунтазам кўпбурчакнинг бурчаклари тенг бўлганлиги сабабли $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ эканлиги тушунарли. Унда ΔA_2OA_3 - тенг ёнли бўлади, ёки

$$OA_2=OA_3 \qquad (1).$$

$$\Delta A_2OA_3 = \Delta A_1OA_4 (A_2A_3 = A_3A_4, OA_3 - \textit{умумий томони}, \angle 2 = \angle 4)$$

Бундан

$$OA_3=OA_4 \qquad (2)$$

келиб чиқади. Худди шундай йўл билан - $A_5, A_6, ... A_n, A_1$ учлари ҳам O нуқтадан бир хил узоқликда эканлигини исбот қилиш мумкин. Демак, $\omega(O,R)$ айлана $(OA_1=R)$ берилган мунтазам кўпбурчакка ташқи чизилган айлана бўлади. R - ташқи чизилган айлана радиуси.

О марказдан мунтазам тўртбурчакнинг ҳар бир томонига перпендикуляр туширсак, улар тенг бўлади. Шунинг учун $\omega(O,R)$ айлана ($OD=r, OD \perp A_1A_2$) берилган мунтазам кўпбурчакка ички чизилган айлана бўлади.

Теорема исбот қилинди.

Мунтазам кўпбурчакка ташқи (ички) чизилган айлананинг маркази мунтазам кўпбурчак маркази деб аталади. $OD=r$

кесмани мунтазам кўпбурчакнинг апофемаси деб аталади ва у ички чизилган айлана радиуси бўлиб ҳисобланади.

МАШҚЛАР

1. Квадратга: а) ички; б) ташқи чизилган айлана ясанг.

2. Квадратнинг томони a га тенг. Квадратга: а) ички; б) ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

3. Мунтазам учбурчак a га тенг. Учбурчакка: а) ички чизилган; б) ташқи чизилган айлана радиусини топинг; в) ички чизилган; г) ташқи чизилган айланаларни ясанг.

4. Мунтазам n бурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигини исбот қилинг.

5. Мунтазам n бурчакка ички айлана чизиш мумкинлигини исбот қилинг.

6. Томонларининг сони: а) 5; б) 8; в) 15; г) 48; д) n га тенг бўлган мунтазам кўпбурчакнинг марказий бурчагини топинг.

7. Агар мунтазам кўпбурчакнинг марказий бурчаги: 1) 30^0; 2) 4^0 га тенг бўлса, унинг нечта томони бор?

8. Мунтазам кўпбурчакнинг марказий бурчаги билан учидаги бурчагининг йиғиндиси 180^0 бўлишини исбот қилинг.

9. Айлана берилган. Унга ички чизилган: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчакли мунтазам кўпбурчакни чизинг.

10. Айлана берилган. Унга ташқи чизилган мунтазам: 1) 6; 2) 8; 3) 12 бурчакни ясанг.

11. Айлана радиусининг тенг ўртасидан ўтиб, унга перпендикуляр бўлган ватар айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томонига тенг бўлишини исбот қилинг.

12. Мунтазам n бурчакнинг томони a га тенг. Унга 1) ташқи чизилган айлана радиуси $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ (1) га; ички чизилган айлана радиуси ва апофемаси $r = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$ (2) га тенг бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Мунтазам кўпбурчакнинг томони, марказий бурчаги ва апофемасидан ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишдан фойдаланинг.

13. 1) n =3; 2) n =4; 3) n =6 бўлса, мунтазам n бурчакнинг берилган a томони бўйича, унга: а) ташқи; б) ички чизилган айлананинг радиусларини топинг.

Кўрсатма. 12 - масаладаги (1) ва (2) формулалардан фойдаланинг.

14. Агар мунтазам 5 бурчакнинг периметри 24 дм бўлса, унга ташқи ва ички чизилган айлананинг радиусларини топинг.

15. Радиуси R га тенг бўлган айлана берилган. Унга: а) ички; б) ташқи чизилган мунтазам n бурчакнинг томонини мос ҳолда $a = 2R\sin\frac{180^0}{n}$ (3) ва $b = 2Rtg\frac{180^0}{n}$ (4) тенгликлари орқали (a,b - мос ҳолда ички ва ташқи чизилган мунтазам n бурчакнинг томонлари) ифодалаш мумкин эканлигини исбот қилинг.

16. Агар: 1) n =3; n =4; 3) n =6 бўлса, радиуси R га тенг бўлган айланага; а) ички; б) ташқи чизилган мунтазам n бурчакнинг томонларини топинг.

17. Агар айлананинг диаметри 18 м бўлса, унга ички ва ташқи чизилган мунтазам 10 бурчакнинг томонларини топинг.

18. Мунтазам n бурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари орасидаги боғланишни аниқланг.

19. Томони 14 см бўлган мунтазам олтибурчакнинг апофемасини топинг.

20. Мунтазам кўпбурчакнинг томони a га, унга ташқи чизилган айлана радиуси Rга тенг бўлса, кўпбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

21. Мунтазам кўпбурчакнинг томони a га, унга ташқи чизилган айлана радиуси r га тенг. Кўпбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

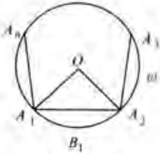
35-§. АЙЛАНА УЗУНЛИГИ

Айлана – эгри чизиқ, унинг узунлигини кесма сингари асбоблар билан ўлчаб бўлмайди. Шу сабабли айлана узунлигини ҳисоблаш учун унга ички чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг периметрлари билан боғлиқ ҳолда ҳисоблаш зарурияти келиб чиқади.

Чиндан ҳам, $\omega(O,R)$ айланага ички чизилган мунтазам n бурчак томонларининг сонини иккилантирсак, унда мунтазам $2n$ бурчакка эга бўламиз. Унинг бир томонини a_{2n} орқали белгиласак, унинг периметри $P_{2n} = 2n \cdot a_{2n}$ бўлади. (P_{2n} - мунтазам $2n$ бурчакнинг периметри). Бунда $A_1A_2 = a_n$ кесмани мунтазам n бурчакнинг бир томони деб ҳисобласак (121-расм), унда $A_1B_1=B_1A_2=\grave{a}_{2n}$ мунтазам $2n$ бурчакнинг томони бўлади.

$$\Delta A_1B_1A_2 : A_1A_2 < A_1B_1 + B_1A_2,\ a_n < 2a_{2n}$$

ёки $na_n < 2na_{2n}$. Бундан $P_n < P_{2n}$ бўлади. Томонлари сонини иккилантиришни чексиз давом эттириш мумкин. Бунда айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг периметри борган сари ортиб боради, лекин айлана узунлигидан ортиб кетмайди. Чунки мунтазам кўпбурчак доим айланага ички чизилган.



121-расм

Демак, айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сони чексиз ортганда бу мунтазам кўпбурчак периметрлари кетма-кетлигининг лимити берилган айлана узунлигига тенг бўлади, деб ҳисоблаш мумкин.

Айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакка нисбатан ҳам шунга ўхшаш мулоҳаза юритиш мумкин. Бунда айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонини орттирган сари кейинги кўпбурчакларнинг периметрлари кичрайиб боришини ҳисобга олиш керак.

Айлана узунлигини ҳисоблашдаги қуйидаги ҳусусиятга тўхталиб ўтамиз. $\omega(O,R)$ ва $\omega (O ,R)$ айланалар берилсин. Уларнинг узунликларини мос ҳолда C ва C' орқали белгилайлик. Бу икки айланага мунтазам n бурчакларни ички чизамиз. Уларнинг томонлари мос ҳолда a_n ва a'_n бўлса, унда кўпбурчакларнинг периметрлари

$$P_n = n\cdot a_n = 2R\cdot n\cdot \sin\frac{180^0}{n}, P'_n = na'_n = 2R'\cdot n\cdot \sin\frac{180^0}{n}$$ бўлади (26–§).

Натижада

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'} \qquad (1)$$

бўлиб қолади. ($2R-\omega$ айлананинг, $2R'-\omega'$ айламанинг диаметри). (1) тенглик n нинг ихтиёрий ($n>2$) мусбат бутун қийматида тўғри бўлади. Агар n сони чексиз орттирилса, P_n ва P' периметрлари мос ҳолда C ва C' қийматларига интилади, $\frac{P_n}{P'_n}$

нисбат эса $\frac{C}{C'}$ нисбатга интилади. Унда (1) тенгликдан

$$\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'} \text{ ёки } \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'} \qquad (2)$$

бўлади.

Шундай қилиб, ҳар қандай айлана узунлигининг шу айлана диаметрига бўлган нисбати доимий бўлади. Бу доимий нисбатни грек ҳарфи π («пи» деб ўқилади) билан белгилаш қабул қилинган. π сони иррационал сон бўлиб, унинг тақрибий қиймати π=3,1416... кўринишда ёзилади. У ҳолда (2) тенгликдан

$$\frac{C}{2R}=\pi \text{ ёки } C=2\pi R \qquad (3)$$

бўлади.

Демак, радиуси R га тенг бўлган айлана узунлиги (3) формула билан ҳисобланади.

360^0 ли марказий бурчакка радиуси R га тенг бўлган тўлиқ айлана мос келиши тушунарли. У ҳолда α марказий бурчакка айлананинг ℓ ёйи мос келади. Демак, айлана ℓ ёйининг узунлиги унга мос келувчи марказий бурчакка пропорционал бўлади. Натижада

$$\frac{2\pi R}{360^0}=\frac{\ell}{\alpha} \text{ ёки } \ell=\frac{\pi R\alpha}{180^0} \qquad (4)$$

формулага эга бўламиз. Демак, α марказий бурчагига мос келувчи ёйнинг узунлиги (4) формула орқали ифодаланади.

МАШҚЛАР

1. Радиуси: 1) 20см; 2) 5,5 дм; 3) 12 м бўлган айлана узунлигини топинг.

2. Диаметри: 1) 180 мм; 2) 2,8 м бўлган айлана узунлигини топинг.

3. Агар айлана узунлиги: 1) 62,8 дм; 2) 25,12 см; 3) 1,5м бўлса, унинг радиусини топинг.

4. Ғўланинг (ёғоч) йўғонлигини (диаметрини) ўлчаш учун уни ип билан ўраб (айлана кўринишида) боғланади ва ипнинг узунлиги ўлчанади. Агар ғулани ўраб олган ипнинг узунлиги: 1,6 м; 2) 14,8 дм бўлса, унда ғуланинг йўғонлиги қанча бўлишини ҳисобланг.

5. Ер шари экваторининг узунлиги тахминан 40000 км га тенг. Экваторнинг диаметрини топинг (100 км гача аниқликда).

6. Ойнинг диаметри 3476 км. Ой экваторининг узунлигини топинг (1 кмгача аниқликда).

7. Қуёшнинг диаметри 1392000 кмга тенг. Қуёш экваторининг узунлигини топинг (1000 кмгача аниқликда).

8. Узунлиги 12,56 см бўлган айланани ясанг.

9. Агар айлана радиусини: 1) R марта орттирсак; 2) a см га орттирсак, айлана узунлиги қандай ўзгаради?

10. Радиуси 0,6 м бўлган ғилдирак 50 марта айланганда қандай масофани босиб ўтади?

11. Айлананинг радиуси 12 см. 1) 60^0; 2) 40^0; 3) 150^0; 4) $45^030'$; 5) $75{,}5^0$ марказий бурчакка мос келувчи айлана ёйининг узунлигини топинг.

12.Агар ёйнинг узунлиги ℓ га тенг, унга мос келувчи марказий бурчак: 1) 120^0; 2) $24^045'$ бўлса, унда ёйнинг радиусини топинг.

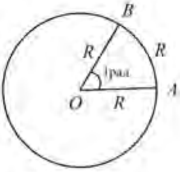
13. 150^0 марказий бурчакка мос келувчи ёйнинг радиуси 6 см га тенг. Узунлиги шу ёй узунлигига тенг бўлган айлана радиусини топинг.

14. Агар ёйнинг радиуси 10см, узунлиги 4,5 см бўлса, шу ёйга тўғри келувчи марказий бурчакни топинг.

15. 60^0 марказий бурчакка тиралиб турган ёйнинг узунлиги 10 м бўлса, унинг ватарини топинг.

36-§. БУРЧАКНИНГ РАДИАН ЎЛЧОВИ

Сизлар бурчакнинг градус ўлчови билан танишсиз (4.3). Математикада бурчак ўлчовининг яна бир тури мавжуд. У бурчакнинг радиан («радиан» лотинча сўз бўлиб, нур, радиус деган маьнода) ўлчови деб аталади. Унинг бирлиги қилиб радиан қабул қилинган. Радиан - ёйнинг узунлиги радиусга тенг бўлган марказий бурчакнинг катталиги (122-расм). У 1 радиан ёки қисқача 1 рад деб белгиланади. Айрим ҳолларда радиан сўзи ёзилмай, бурчакни ифодаловчи сон ёзиб қўйилади.



122-расм

Демак, бурчак катталигини радиан орқали аниқлашда унинг катталиги унга мос келувчи ёй узунлигининг радиусга нисбати кўринишида ифодаланади. Унда радиуси R га тенг бўлган айлананинг ℓ узунликдаги ёйига мос келувчи марказий бурчакни φ рад деб белгиласак, уни

$$\frac{\ell}{R} = \varphi \quad \text{ёки} \quad \ell = R \cdot \varphi \ \text{рад}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бурчакнинг градус ва радиан ўлчовлари орасидаги боғланишни кўриб чиқамиз.

Берилган айлана ёйининг узунлиги (1)

$$\ell = \frac{\pi R a^0}{180^0} \tag{2}$$

формула орқали ифодаланиши маълум (135 §), бунда a^0 марказий бурчакнинг градус ўлчови. (1) ва (2) формулалардан

$$\frac{180^0}{\pi} = \frac{a^0}{\varphi \, рад} \tag{3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$a^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot \varphi \ \text{рад} \tag{4}$$

бўлади ва

$$\varphi \, рад = \frac{\pi}{180^0} \cdot a^0 \tag{5}$$

бўлади.

Агар $\alpha^0 = 180^0$ ёки марказий бурчак ярим айланани ташкил қилса, унда (5)дан φ *рад*$=\pi$ бўлади. Демак, 180^0 га тенг бурчакнинг радиан ўлчови π га тенг. У ҳолда $180^0 = \pi$ рад деб

ёзиш мумкин. Бундан $1^0 = \frac{\pi рад}{180}$ бўлади. Бу 1^0 тахминан 0,017 рад га тенг. $180^0 = \pi$ *рад* тенглигидан 1 рад$=\frac{180^0}{\pi}$ бўлади, у тахминан $57^0 17'$га тенг.

МАШҚЛАР

1. Айлананинг тўлиқ бурчаги неча радианга тенг?
2. 2 рад қанча градусга тенг?
3. Бурчакнинг радиан ўлчови: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) 2π бўлса, унинг градус ўлчовини топинг.
4. Бурчакнинг радиан ўлчови: а) 10,5 рад ёки 0,5; б) 0,2; в) 3,14...; г) 10 бўлса, унинг градус ўлчовини топинг.
5. $30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0$ бурчакларни радиан орқали ифодалаб ёзинг.

6. Агар α бурчаги: 10^0, 18^0, 240^0 бўлса, уни радиан ўлчов орқали ифодалаб ёзинг.

VII БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Синиқ чизиқнинг қандай турларини биласиз?
2. Содда синиқ чизиқнинг хоссаларини айтиб беринг.
3. Кўпбурчакка таьриф беринг.
4. Қавариқ ва қавариқ эмас кўпбурчаклар қандай фарқ қилади?
5. Қавариқ кўпбурчакнинг нечта диагонали бор?
6. Қавариқ кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси қандай ҳисобланади?
7. Қандай қавариқ тўртбурчакка: а) ички; б) ташқи айлана чизиш мумкин?
8. Мунтазам кўпбурчакка таъриф беринг. Мисоллар келтиринг.
9. Айланага ички (ташқи) чизилган кўпбурчакларни таърифланг.
10. Нима учун мунтазам кўпбурчакка ички ҳам, ташқи ҳам айлана чизиш мумкинлигини тушунтириб беринг.
11. Айлананинг узунлиги сифатида қайси катталикни олиш мумкин?
12. π (пи) сонини қандай тушунасиз?
13. Айлана ёйининг узунлиги қандай аниқланади?
14. Бурчакнинг радиан ўлчови қандай аниқланади?

VII БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. $\omega(O;R)$ ва $\omega(O';R')$ айланалари берилган. $d=OO'$ - марказлари орасидаги масофа, $d < R + R'$ бўлса, айланалар орасидаги энг катта (кичик) оралиқни топинг.

Кўрсатма: Синиқ чизиқнинг хоссасидан фойдаланинг.

2. Ёпиқ синиқ чизиқнинг ихтиёрий икки учининг орасидаги масофа синиқ чизиқ узунлиги ярмидан катта бўлмаслигини исбот қилинг.

3. Ички бурчакнинг йиғиндиси 7200^0 га тенг бўлган қавариқ кўпбурчак бўлиши мумкинми? Агар шундай кўпбурчак мавжуд бўлса, унинг томонлари сони нечта?

4. Қавариқ беш бурчакнинг диагоналлари йиғиндиси унинг ярим периметридан катта бўлишини исбот қилинг.

5. Қавариқ кўпбурчакнинг бир томони a га тенг. Унинг қаршисидаги томони ундан 6 марта, қолган томонлари 2:3 марта катта бўлса, шу тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкинми?

6. Агар қавариқ тўртбурчакнинг барча бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлишини исбот қилинг.

7. Айланага ташқи чизилган трапециянинг қарама-қарши томонларининг йиғиндилари тенг бўлишини исбот қилинг.

8. Ички бурчакларининг бири 150^0га тенг бўлган мунтазам кўпбурчак мавжудми? Унинг томонлари сони нечта?

9. Мунтазам бешбурчакнинг диагоналлари тенг бўлишини исбот қилинг.

10. Мунтазам *n* бурчак томонларининг ўрталари иккинчи мунтазам *n* бурчакнинг учлари бўлишини исбот қилинг.

11. Мунтазам 12 бурчакнинг ташқи бурчагини топинг.

12. Мунтазам кўпбурчакнинг ташқи бурчаги 24^0га тенг. Унинг томонлари сонини топинг.

13. Мунтазам бешбурчакда кесишувчи диагоналларнинг кесмаларидан бири бешбурчакнинг томонига тенг бўлишини исбот қилинг.

14. Диаметри *a* га тенг бўлган айланага мунтазам олтибурчак ички чизилган: а) мунтазам 6 бурчакнинг периметри; б) айлана узунлигини топинг.

15. Қирғиз халқининг «ордо» ўйини айлана шаклидаги майдончада ўтказилади. «Ордо» майдонини чегаралаб турган айлана радиуси 7м бўлади. Шу айлана узунлигини топинг.

16. Автомашина ғилдирагининг диаметри 75см. Машина йўлда юриб кетаётганда унинг ғилдираги 10 марта айланса, машина ғилдираги қанча йўл босиб ўтади?

17. Радиуси *R*га тенг бўлган айлананинг диаметрини: а) *a* га орттирсак (камайтирсак); б) *R* марта орттирсак (камайтирсак), унда берилган айлананинг узунлиги қандай ўзгаради?

18. Ромбнинг томони 15см, бурчаги 30^0. Бу ромбга ички чизилган айлана узунлигини топинг.

19. Томонлари a, a, a, $2a$ бўлган трапецияга ташқи чизилган айлана узунлигини топинг.

VIII БОБ. ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

37-§. СОДДА ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

37.1. ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Юзни ўлчаш қадим даврлардан бери қўлланилиб келаётган тушунчалардан бири. Бизнинг эрамизгача III асрдаёқ греклар «ерни ўлчаш» деган тушунчани «геометрия» сўзи билан ифодалагани бежиз эмас.

Юз ҳақидаги тушунча билан сизлар бошланғич математика курсиданоқ танишсиз. Биз бунда юз тушунчасига чуқурроқ тўхталиб ўтамиз. Юз катталик сифатида кўрилади. Шунинг учун аввал юзнинг ўлчов бирлигини танлаб олиш керак. Юзнинг ўлчов бирлиги сифатида томони узунлик бирлигига тенг бўлган квадратнинг юзини қабул қиламиз. Юз катталик бўлганлиги сабабли уларни ўзаро қўшиш, уни мусбат сонга кўпайтириш мумкин. Бу амаллар натижасида доим юз келиб чиқади.

Юзини ҳисоблаш керак бўлган нарсани ёки нарсанинг юзини фигура сифатида қараш керак. У текисликда деб ҳисобланади.

F фигура берилсин. Унинг юзини $S(F)$ орқали белгилаймиз (*S* - лотин алфавитининг бош ҳарфи, «эс» деб ўқилади).

Томони e бирлик кесмага тенг бўлган бирлик квадратнинг юзи e^2 орқали белгиланади. *F* фигуранинг юзини топиш учун юзаси e^2 га тенг бўлган бирлик квадрат бу фигурага навбат билан неча марта тўғри келишини билиш керак.

Агар

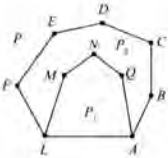
$$S(F)=k\cdot e^2 \qquad (1)$$

бўлса, унда *k* сони берилган ўлчов бирлигида юзанинг сон қийматини ифодалайди. Бунда F фигуранинг ичига навбати билан бирлик квадрат k марта тўғри келади, деб аталади. Масалан, S= 9см² бўлса, k=9, e =1см² тушунилади.

F содда фигура, масалан, тўғри тўртбурчак ёки параллелограмм бўлса, унда *k* нинг қийматини топиш қулай. *F* эгри чизиқ билан чегараланган бўлса, унда *k* нинг қийматини топиш анча мураккаб бўлади. Умуман олганда, юқоридагидек йўл билан юзни аниқлаш назарий томондан ҳам, амалий томондан ҳам бир қатор қийинчиликларга олиб келади.

Биз қуйида содда кўпбурчакларнинг юзларини топишга тўхталиб ўтамиз.

37.2. КЎПБУРЧАКНИНГ ЮЗИ



123-расм

ABCDEFL содда кўпбурчак берилсин (123-расм). Уни P орқали белгилаймиз.

Бу кўпбурчакнинг ичидан олинган *LMNQA* синиқ чизиқ орқали иккита кўпбурчакка ажратиш мумкин: *ALMNQ* (уни P_1 орқали белгилаймиз) ва *ABCDEFLMNQ* (уни P_2 билан белгилаймиз).

Бу икки кўпбурчак ички умумий нуқтага эга бўлмайди, улар ҳам содда кўпбурчаклар бўлади. Бу ҳолда P_1 ва P_2 кўпбурчакларнинг йиғиндиси P кўпбурчакни ҳосил қилади. Уни $P=P_1+P_2$ деб ёзиш ёки P кўпбурчаги P_1 ва P_2 кўпбурчакларига бўлинган, деб ҳисоблаш мумкин.

Юз – бу томони узунлик бирлигига тенг бўлган квадрат билан ифодаланувчи ясси фигуранинг ўлчови бўлиб ҳисобланади.

Юзнинг исботсиз қабул қилинадиган қуйидаги хоссалари бор:

1) тенг фигуралар тенг юзларга эга.

2) Агар фигура бўлакларга бўлинган бўлса, унда унинг юзи ўша бўлаклар юзлари йиғиндисига тенг.

Қисқача айтганда, ихтиёрий фигуранинг юзини топиш талаб қилинса, унда томони узунлик бирлигига тенг бўлган қанча квадратни ўша фигурага қўйиш мумкинлигини аниқлаш керак.

Юқоридаги тушунчалар асосида яна қуйидагини айтиш мумкин. Юзлари тенг бўлган кўпбурчаклар бир хил катталикка эга деб ҳисобланади. Икки кўпбурчак чекли миқдордаги бўлакларга бўлинганда уларнинг мос бўлаклари тенг бўлса, у ҳолда бу кўпбурчаклар бир хил ясалган, деб айтиш мумкин. Демак, бир хил ясалган кўпбурчаклар бир хил катталикка эга бўлади. Уларга мисоллар кейинги параграфларда келтирилади.

37.3. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКНИНГ ЮЗИ

54-теорема. **Тўғри тўртбурчакнинг юзи қўшни бўлган икки томони кўпайтмасига тенг.**

Исбот. $ABCD$ тўғри тўртбурчак берилиб, қўшни томонлари a ва b бўлсин. Унинг юзини S орқали ифодалайлик.

$$S=a\cdot b \qquad (1)$$

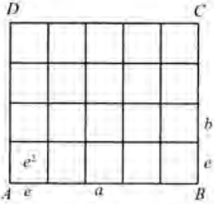
бўлишини исбот қиламиз. Бу юзни томони e бирлик кесмага тенг бўлган бирлик квадрат орқали ҳам

$$S=a\cdot b\cdot e^2 \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда e бирлик квадратнинг юзи, уни амалда $м^2$ ёки $дм^2$, $см^2$ ёки $мм^2$ ва яна бошқа кўринишда ёзиш мумкин.

Тўғри тўртбурчакнинг a, b томонларининг узунликларига нисбатан уч ҳолат бўлиши мумкин.

1) Агар томонлари a = 5см ва b = 4см (e =1 см) бўлган тўғри тўртбурчак берилса (124-расм), унда томони 1 см ёки юзи 1 $см^2$ бўлган бирлик квадратларни унга навбати билан зич қилиб 20 марта жойлаштиришимиз мумкин. Бунда S=20 $см^2$ эканлиги сизларга маълум. Демак, тўғри тўртбурчак юзини унинг эни билан бўйини кўпайтириб топдик.



124-расм

Умумий ҳолда, $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг томонлари a ва b натурал сонлар бўлса, унда e бирлик кесманинг AB томонига a марта, BC томонига b марта ўлчаб қўйиш мумкин. Унда берилган тўғри тўртбурчак бирлик квадратлари сони $a\cdot b$га тенг бўлган тўғри тўртбурчак бўлади. Бунда ҳар бир бирлик квадратнинг юзи 1га тенг бўлганлиги сабабли, берилган тўғри тўртбурчакдаги барча бирлик квадратлар юзаларининг йиғиндиси $a\cdot b$ сонига тенг бўлади. Демак, берилган тўғри тўртбурчакнинг юзи $S=a\cdot b$ га тенг, бошқача айтганда (1) тенглик тўғри.

2) Тўғри тўртбурчакнинг томонлари a билан b чекли ўнли каср бўлганда ҳам (1) формула тўғри бўлишини кўрсатиб ўтамиз. a , b томонлари ўнлик хоналарининг сони n дан катта бўлган чекли ўнли каср орқали ифодалансин. Бу бирлик кесмани тенг

10^n қисмларга бўлиш орқали олиниши маълум. $e_1 = \frac{e}{10^n}$ деб ҳисоблайлик. Энди $ABCD$ тўғри тўртбурчакда e_1 бирлик кесмасини AB томонига $a_1 = a \cdot 10^n$, BC томонига $b_1 = b \cdot 10^n$ марта ўлчаб қўйиш мумкин. Бунда a_1, b_1 сонлари натурал сонлар бўлиши тушунарли. Унда уларга 1-ҳолатни қўллашимиз мумкин:

$$S = a_1 \cdot b_1 = a \cdot b \cdot 10^{2n} \tag{3}$$

та бирлик квадратлар бор.

Демак, бу ҳолатда ҳам тўғри тўртбурчакнинг юзи қўшни ётган a_1, b_1 икки томонининг кўпайтмасига тенг ёки (1) тенглик тўғри.

3) a ва b сонларини бўлганда биттаси чексиз ўнли каср бўлган ҳолни кўриб чиқамиз.

Унда уларни яхитланган сонлар орқали ифодалаш мумкин. Уларнинг кўпайтмаси тақрибий сонларни кўпайтириш қондаларига асосланган. a сонининг ўнли улушигача аниқликдаги ками билан олинган яхлитланган қиймати a_1 бўлсин, ортиғи билан олингани a_2 бўлсин: $a_1 < a < a_2$. Худди шундай аниқликда олинган b сонининг яхлитланган қийматлари b_1 (ками билан) ва b_2 (ортиғи билан) бўлсин: $b_1 < b < b_2$. Бу ҳолда a_1, a_2, b_1, b_2 сонларининг ҳар бири чекли ўнли каср бўлиб қолади. У ҳолда $S_1 = a_1 \cdot b_1$ ва $S_2 = a_2 \cdot b_2$ юзларига эга бўламиз.

Томонлари a_1, b_1 бўлган тўғри тўртбурчак берилган тўғри тўртбурчак ичида, томонлари a_2, b_2 бўлган тўғри тўртбурчак берилган тўғри тўртбурчакнинг ташқарисида жойлашиб қолади. Демак, берилган тўғри тўртбурчакнинг юзи $a_1 \cdot b_1$ ва $a_2 \cdot b_2$ сонларининг орасида ётади. Бунда $a_1 \cdot b_1$ ва $a_2 \cdot b_2$ қийматлари $a \cdot b$ сонининг олдиндан берилган аниқликда яхлитланган қийматлари. Агар nни ҳоҳлаганча катталаштириб олсак, унда улар $a \cdot b$ сонига яқинлашади. Демак, бу ҳолда ҳам $S = a \cdot b$ бўлади (бу ҳақида тўлиқ маълумот алгебра курсидан сизларга маълум).

Шундай қилиб, тўғри бурчакли тўртбурчакнинг томонлари ихтиёрий a ва b сонлари бўлса, унда унинг юзи $S = a \cdot b$ (1) бўлади. Теорема исбот қилинди.

Агар $a = b$ бўлса, тўғри тўртбурчак квадрат бўлиб қолади. Унда томони a га тенг бўлган квадрат юзининг формуласи (1) дан:

$$S = a^2 \tag{4}$$

бўлади.

МАШҚЛАР

1. Ер участкасининг юзи 10 га. Агар юзани ўлчов бирлиги учун квадрат: а) километрни; б) метрни; в) арни олсак, унда берилган юзанинг сон қийматини топинг.

2. Қуйидагиларни ҳисобланг:
1)8,2 дм^2+ 780 см^2; 2) 1,6 м^2+640 дм^2; 3) 6ар - 204м^2; 4) 4га+70000м^2.

3. Томонлари 16 см ва 25 см бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг.

4. Квадратнинг томони 4,5 дм. Унинг юзини ҳисобланг.

5. Квадрат шаклидаги икки ер участкасининг томонлари 60 м ва 80 м. Шу икки участкага тенг катталикдаги квадрат шаклида бўлган ер участкасининг томонини топинг.

6. Квадратнинг диагонали *d*. Унинг юзини топинг.

7. Радиуси Rга тенг бўлган айланага: а) ички; б) ташқи чизилган квадратларнинг юзини топинг.

8. Битта айланага ташқи ва ички чизилган квадратлар юзларининг нисбатини топинг.

9. Агар квадратнинг ҳар бир томони: 1) 4 марта орттирилса; 2) 2,5 марта кичрайтирилса, квадратнинг юзи қандай ўзгаради?

10. Квадратнинг юзини: 1) 2 марта орттириш учун; 2) 9 марта кичрайтириш учун унинг ҳар бир томонини қандай ўзгартириш керак?

11. Эни 3 см бўлган тўғри тўртбурчакдан юзи 9см^2 бўлган квадратни кесиб олишди. Агар кесиб олингандан кейинги тўғри тўртбурчакнинг юзи 36см^2 бўлиб қолса, берилган тўғри тўртбурчак юзини топинг.

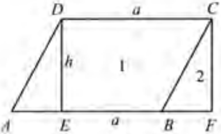
12. Тўғри тўртбурчак шаклидаги ер участкасининг бўйи 242,5 м ва эни 81,6 м бўлса, участканинг юзини топинг, қийматини гектар ва ар орқали ифодаланг.

13. Тўғри тўртбурчакнинг юзи 80га, бўйи 2 км бўлса, унинг периметрини ҳисобланг.

14. Тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати 5:7га, юзи 140 дм^2 бўлса, унинг томонларини топинг.

15. Агар тўғри тўртбурчакнинг периметри 96м, юзи эса 540дм^2 бўлса, унинг томонларини топинг.

38-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАММНИНГ ЮЗИ



125-расм

55-теорема. **Параллелограммнинг юзи унинг асоси билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.**

Исбот. $ABCD$ параллелограмм берилсин (125-расм). $AB=a$ - асоси, $ED = h$ - баландлиги. Бу параллелограммни $EFCD$ тўғри тўртбурчак билан таққослаймиз. $EBCD$- умумий бўлак, $\Delta AED=\Delta BFC$, шунинг учун

$$S(ABCD) = S(\Delta AED) + S(EBCD) = S(\Delta BFC) + $$
$$+ S(EBCD) = S(EFCD)$$

$$S(ABCD)=S(EFCD)=EF\cdot ED=a\cdot h.$$

Демак, $S(ABCD)=a\cdot h$. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

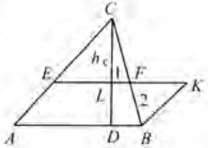
1. Параллелограммнинг томони 4,5дм, шу томонига туширилган баландлиги 2,6 дм бўлса, унинг юзини топинг.
2. Параллелограммнинг томонлари 15 см ва 12 см, баландлиги 6см. Унинг иккинчи баландлигини ҳисобланг. Масаланинг нечта ечими бор?
3. Биттадан томонлари параллел, шу томонларига туширилган баландликлари тенг бўлган параллелограмм ва тўғри тўртбурчак тенг бўлишини исбот қилинг. Уларни бир хил ясалган деб ҳисоблаш мумкинми?
4. Параллелограммнинг юзи 2,4м^2: а) томони 1,5 м бўлса, унинг баландлигини; б) баландлиги 0,6м бўлса, унга тегишли томонини ҳисобланг.
5. Параллелограммнинг томонлари 24 дм ва 18 дм, улар орасидаги бурчаги: а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0 бўлса, унинг юзини топинг.
6. Икки баландлиги ва периметри бўйича параллелограммнинг юзини ифодаланг.
7. Параллелограммнинг томони a, диагонали dга тенг бўлиб, у билан ҳосил қилган бурчаги αга тенг бўлса, параллелограммнинг юзини топинг.
8. Параллелограммнинг томонлари 14м ва 8см, юзи 56 м^{2}бўлса, параллелограммнинг ўткир бурчагини топинг.

9. xOy координаталар системасида параллелограммнинг учлари O (0;0), A (4;0), B (6; 5), C (2;5) нуқталарда ётади. Унинг юзини топинг.
10. Ромбнинг томони 14 см, баландлиги 6см. Юзини ҳисобланг.
11. Ромбнинг юзи 10,6 дм^2, томони 2,5 дм бўлса, унинг баландлигини топинг.
12. Ромбнинг юзи диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.
13. Ромбнинг томони 12 см, бурчаги 60^0 бўлса, унинг юзини топинг.
14. Ромбнинг юзи S, бир бурчаги α бўлса, унинг томонини топинг.
15. Ромбнинг томони a. Топинг: а) юзи Sга тенг бўлса, ромбга ички чизилган айлананинг радиусини; б) ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса, ромбнинг юзини.
16. Ромбнинг баландлиги 48м, кичик диагонали 52м бўлса, унинг юзини топинг.
17. Ромб диагоналларининг нисбати 2:3 га тенг, юзи 12см^2. Унинг диагоналларини топинг.

39-§. УЧБУРЧАКНИНГ ЮЗИ

***56-теорема*. Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан асосига туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.**

Исбот. ΔABC нинг $AB=c$ асоси, $CD=h_c$ баландлиги бўлса,



$S(\Delta ABC)=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ эканлигини исбот қиламиз (126-расм).

EF ўрта чизиғини ўтказамиз, унинг давомига $EF=FK$ кесмани ўлчаб қўямиз. В билан Кни туташтирамиз. $ABKE$ параллелограмм ҳосил бўлади ($AB\parallel EK$ ва $AB=EK$).

Бунда $\Delta EFC=\Delta BKF$ (1-аломати бўйича, $EF=FK$, $CF=FB$, $\angle 1=\angle 2$).

$$S(\Delta ABC)=S(ABFE)+S(\Delta EFC)=S(ABFE)+S(\Delta BKF)=$$

$$=S(ABKE)=AB\cdot LD=AB\cdot\frac{CD}{2}=c\cdot\frac{h_c}{2}$$

Бунда $LD = \frac{1}{2}CD$.

Шундай қилиб, $S(\Delta ABC) = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

Бу теорема берилган учбурчакнинг қолган томонлари учун ҳам тўғри бўлади: $S(\Delta ABC) = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ ёки $S(\Delta ABC) = \frac{1}{2}b \cdot h_b$.

МАШҚЛАР

1. Учбурчакнинг бир томони 34,5 дм, унга тушурилган баландлик 12,6 дм. Юзини топинг. Учбурчакнинг элементларини белгилашлар юқорида берилган.

2. Учбурчакнинг юзи 36 м^2. Агар: а) томони 12 м бўлса, унга туширилган баландлигини; б) баландлиги 4 м бўлса, унга мос келувчи томонини топинг.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси a, ён томони b бўлса, юзи $S = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$ (1) формула билан ифодаланишини исбот қилинг.

4. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асоси ва ён томони: а) a =8 см, b =6см; б) a =4 м, b = 2,8 м бўлса, шу учбурчакнинг юзини топинг.

Кўрсатма: (1) формуладан фойдаланинг.

5. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони12,8 см. Агар асосидаги бурчаги: а) 30^0; б) 45^0; в) 60^0; г) 40^0 бўлса, учбурчакнинг юзини топинг.

6. Тенг томонли учбурчакнинг томони a. Унинг юзини топинг.

7. Тенг томонли учбурчакнинг юзи S. Томонини топинг.

8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b. Юзи $S = \frac{1}{2}a \cdot b$ (2) бўлишини исбот қилинг.

9. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари: 1) a =1,6м, b=4,5 м; 2) a =5 см, b =7,6 см бўлса, унинг юзини ҳисобланг..

Кўрсатма: 8 масаладаги (2) формуладан фойдаланинг.

10. ABC тўғри бурчакли учбурчакда a ва b унинг катетлари, c - гипотенузаси, h - тўғри бурчак учидан туширилган баландлик бўлса, $ab=ch$ бўлишини исбот қилинг.

11. Агар тўғри тўртбурчакнинг бир томони учбурчакнинг бир томонига мос келиб, иккинчи томони учбурчакнинг ўша томонига туширилган баландликнинг ярмига тенг бўлса, унда тўғри тўртбурчак билан учбурчакнинг юзлари тенг бўлишини исбот қилинг.

12. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c берилган. Унинг юзи

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3) формуласи бўйича ифодаланишини исбот қилинг, бунда р - учбурчакнинг ярим периметри: $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Кўрсатма. Томонлари бўйича учбурчакнинг битта баландлигини ҳисоблаб, ундан кейин формулани соддалаштириш керак.

13. Агар учбурчакнинг томонлари: 1) 29; 25; 6; 2) 5; 6; 9; 3) 6; 5; 2,2; 4) 5; 4; $\sqrt{17}$ бўлса, унинг юзини ҳисобланг.

14. Учбурчакнинг томонлари 25 м, 29 м, 36 м бўлса, унинг энг кичик баландлигини топинг.

15. Учбурчакнинг томонлари 13 см, 14 см, 15 см бўлса, энг катта баландлигини топинг.

16. Радиуси Rга тенг бўлган айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

17. Радиуси rга тенг бўлган айланага ташқи чизилган мунтазам учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

18. ABC учбурчакнинг a, b томонлари, улар орасидаги бурчаги γ берилса, бу учбурчакнинг юзи $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ (4) формула орқали ҳисобланишини исбот қилинг.

19. Агар учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги: 1) $a=12$; $в=8,4$; $\gamma=30^0$; 2) $a=7,8$; $в=15$; $\gamma=50^0$; 3) $в=3,4$; $c=5$; $\alpha=70^0$; 4) $a=0,8$; $в=0,6$; $\beta=110^0$ бўлса учбурчакнинг юзини топинг.

Кўрсатма. 18-масаладаги (4) формуладан фойдаланинг.

20. ABC учбурчакнинг a томони ва унга ёпишган β ва γ бурчаклари берилса, унинг юзини $S=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ (5) формула орқали топиш мумкинлигини исбот қилинг. Бунда $\alpha=180^0-(\beta+\gamma)$.

Кўрсатма. Бурчак синусининг таърифидан фойдаланиб, b ва c томонларини топиш тавсия этилади.

21. Агар учбурчакнинг бир томони, унга ёпишган икки бурчаги: 1) $a=16$; $\beta=120^0$; $\gamma=30^0$; 2) $a=15,6$; $\beta=48^0$; $\gamma=70^0$; 3) $b=8$; $\alpha=37^0$; $\gamma=63$, 4) $c=0,8$; $\alpha=112^0$; $\beta=40^0$ бўлса унинг юзини топинг.

Кўрсатма. 20 - масаладаги (5) формуладан фойдаланиш тавсия қилинади.

22. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети ва гипотенузаси берилган. Унинг юзини ҳисобланг.

23. ABC учбурчакнинг a, b, c томонлари берилган. Учбурчакка а) ташқи чизилган айлананинг радиуси $R=\dfrac{abc}{4S}$; б) ички чизилган айлананинг радиуси $r=\dfrac{S}{P}$ бўлишини исбот қилинг.

Бунда S - учбурчакнинг юзи, P - учбурчак периметрининг ярми ($P=\dfrac{a+b+c}{2}$).

24. 13-масалада берилган учбурчакка: а) ташқи; б) ички чизилган айлана радиусини топинг.

25. Берилган ABC учбурчак билан умумий BC асосга эга бўлган ва юзи берилган учбурчак юзига тенг бўлган $A'B'C'$ бурчакни ясанг.

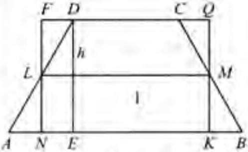
26. ABC учбурчак берилган. Уни бир хил юзага тенг бўлган тўртта учбурчакка бўлувчи ва учбурчакнинг A учидан ўтувчи тўғри чизиқлар ўтказинг.

27. Параллелограммнинг диагоналлари уни бир хил юзага тенг бўлган тўртта учбурчакка бўлишини исбот қилинг.

40-§. ТРАПЕЦИЯ ЮЗИ

57-теорема. **Трапециянинг юзи асослари узунликлари йиғиндисининг ярми (ўрта чизиғи) билан баландлиги кўпайтмасига тенг.**

Исбот. $ABCD$ трапеция берилган (127-расм). $AB=a$, $DC=b$ асослари, $DE=h$ - баландлик. LM - ўрта чизиғи, $LM=\dfrac{a+b}{2}$ бўлиши маълум. L, M нуқталаридан трапеция асосларига



127-расм

перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказсак, $NKQF$ тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади: $NK=LM; FN=DE$.

Берилган трапеция билан тўғри тўртбурчакни солиштирамиз: $NKMCDL$ умумий бўлак, $\Delta ANL=\Delta LDF, \Delta KBM=\Delta MQC$, чунки тўғри бурчакли учбурчакларнинг мос гипотенузалари ва биттадан ўткир бурчаклари тенг.

$$S(ABCD)=S(\Delta ANL)+S(NKMCDL)+S(\Delta KBM)=$$

$$=S(\Delta LDF)+S(NKMCDL)+S(\Delta MQC)=S(NKQF)=NK\cdot FN=$$

$$=LM\cdot DE=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

Демак, $S(ABCD)=\frac{a+b}{2}\cdot h$. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. Асослари 15 см ва 19 см, баландлиги 18 см бўлган трапециянинг юзини топинг.
2. Трапециянинг асослари 3,5 дм ва 2,9 дм, юзи 2,56 дм^2 бўлса, трапециянинг баландлигини топинг.
3. Трапеция баландлиги 16 см, юзи 4дм^2 бўлса, трапециянинг баландлигини топинг.
4. Трапециянинг юзи 288см^2, асосларининг нисбати 4:5га тенг, баландлиги 3,2 дм бўлса, унинг юзини топинг.
5. Трапециянинг катта асоси 42 м, баландлиги 15, ён томонларининг асослардаги проекциялари баландлигига тенг бўлса, трапеция юзини топинг.
6. Тенг ёнли трапециянинг асослари 5,1 дм ва 6,9 дм, ён томони 41 см бўлса, унинг юзини топинг.
7. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси a, ён томони c; асосидаги ўткир бурчаги α бўлса, унинг юзини $S=(a-c\cdot\cos\alpha)\cdot c\cdot\sin\alpha$ (1) формуласи орқали ифодаланишини исбот қилинг.
8. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси a=22 см, ён томони c=8 см ва асосидаги ўткир бурчаги: 1) 30^0; 2) 45^0; 3)70^0; 4) 20^0 берилган бўлса, унинг юзини топинг.

   Кўрсатма. 7-масаладаги (1) формуладан фойдаланинг.
9. Тўғри бурчакли трапециянинг асосидаги ўткир бурчаги 30^0, асосларининг йиғиндиси k ва ён томонларининг йиғиндиси q бўлса, трапециянинг юзини топинг.

10. Трапециянинг асослари 6дм ва 2 дм, ён томонлари 0,13 м ва 0,37м бўлса, унинг юзини топинг.

11. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси 22 м, ён томони 8,5 м ва диагонали 19,5 м бўлса, трапециянинг юзини топинг.

12. Тенг ёнли трапециянинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр, асослари 24 см , 40 см бўлса, унинг юзини топинг.

13. Баландлиги h, диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган тенг ёнли трапециянинг юзини ифодаланг.

14. Трапециянинг асослари 1,42 м ва 0,89 м, диагоналлари 1,2 м ва 1,53 м бўлса, унинг юзини топинг.

15. Радиуси Rга тенг бўлган айлана марказининг бир томонида ётиб, бир-бирига параллел бўлган икки ватар ўтказилган, бу ватарлар 60^0 ва 120^0 ёйларга тиралган. Ватарлар учларини туташтирганда ҳосил бўлган трапеция юзини топинг.

16. ABC учбурчакнинг DE ўрта чизиғи $(D \in AC, E \in BC)$ ўтказилган. 1) ABC ва DEC учбурчаклар юзларининг нисбатини; 2) ABC учбурчак билан $ABED$ трапеция юзларининг нисбатини; 3) DEC учбурчак ва $ABED$ трапеция юзларининг нисбатини топинг.

17. Тенг ёнли трапеция айланага ички чизилган. Ён томони уриниш нуқтаси орқали 0,4дм ва 0,9дм узунликдаги кесмаларга бўлинган. Трапециянинг юзини топинг.

41-§. АЙЛАНАГА ИЧКИ (ТАШҚИ) ЧИЗИЛГАН КЎПБУРЧАКЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

Аввал қавариқ кўпбурчакнинг юзларини аниқлаш ҳақидаги умумий саволга қисқага тўхталамиз. У 37.2–§ даги таърифга асосланган.

Ихтиёрий P ясси кўпбурчак берилсин. Уни $\Delta i (i = 1,2,3,4...n)$ учбурчакларга ажратамиз (улар ички умумий нуқтага эга бўлмайди ва йиғиндиси P кўпбурчакни ташкил қилади). Бу учбурчакларнинг ҳар бирининг мос равишда асоси a_i, унга тегишли баландлиги h_i бўлсин, у ҳолда улар орқали $S_i(\Delta i) = \frac{1}{2} a_i h_i$ юзни ҳисоблаш мумкин. P кўпбурчакнинг юзи Δi учбурчаклари юзларининг йиғиндисидан иборат деб ҳисоблаш мумкин:

$$S(P) = S_1(\Delta_1) + S_2(\Delta_2) + ...S_n(\Delta_n).$$

Демак, кўпбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун (умумий ҳолда) уни учбурчакларга бўлиб, шу учбурчаклар юзларининг йиғиндисини топиш керак.

$\omega(O,r)$ айланасига ташқи чизилган $A_1A_2...A_n$ кўпбурчак берилган (128-расм), уни Q орқали белгилаймиз. Унинг томонларининг уриниш нуқталари мос ҳолда $B_1,B_2...B_n$ бўлсин.

О марказни берилган кўпбурчак учлари ва уриниш нуқталари билан туташтирамиз. $OB_1=OB_2=...=OB_n=r$ бўлади.

58-теорема. **Айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг юзи унинг периметри ярми билан айлана радиуси кўпайтмасига тенг:**

$$S(A_1A_2...A_n)=S_1(A_1A_2O)+S_2(A_2A_3O)+...+S_n(A_nA_1O)=$$
$$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot OB_1+\frac{1}{2}A_2A_3OB_2+...+\frac{1}{2}A_nA_1\cdot OB_n=p\cdot r,$$

бунда S, $S_1,S_2 ...S_n$ – кўпбурчак ва мос учбурчакларнинг юзлари, $P=A_1A_2+...+A_nA_1$ – кўпбурчак периметри, p - периметрнинг ярми. Демак,

$$S(Q)=p\cdot r \tag{1}$$

теорема исбот қилинди.

1-натижа. Айланага ташқи чизилган мунтазам *n* - бурчакнинг юзи

$$S_n=\frac{n\cdot r}{2} \tag{2}$$

бўлади. Бунда - S_n – мунтазам n бурчакнинг юзи, $P_n=na$ периметри a - унинг бир томони, r - ички чизилган айлана радиуси. Бу (1) формуладан келиб чиқади.

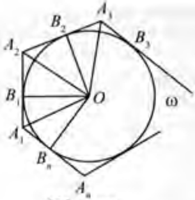
2-натижа. Айланага ташқи чизилган томонлари *a,b,c* бўлган учбурчакнинг юзи

$$S_n=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=p\cdot r \tag{3}$$

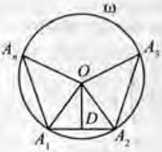
бўлади. Бунда p - учбурчак периметрининг ярми.

59-теорема. Мунтазам n бурчакнинг юзи унинг ярим периметри билан апофемасининг кўпайтмасига тенг.

Исбот. $A_1A_2...A_n$ мунтазам n бурчак берилсин (129-расм). Мунтазам n бурчакка ташқи чизилган айлана $\omega(O,R)$ бўлсин. $OA_1=R_n$, OD-апофема бўлади.



128-расм



129-расм

$\Delta AOA_2 = \Delta A_2OA_3 = ... = \Delta A_nOA_1$. Бу учбурчакларнинг юзларининг йиғиндиси Q_n кўпбурчакнинг юзига тенг.

$S(Q_n) = n \cdot S(A_1OA_2) = n\frac{1}{2} \cdot a \cdot OD;$ $\frac{a \cdot n}{2} = p-$ бу Q_n нинг ярим периметри. Демак, $S(Q_n) = p \cdot OD$. Теорема ибот қилинди.

МАШҚЛАР

1. Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлса, унда унинг юзи диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.
2. $ABCD$ қавариқ тўртурчакнинг диагоналлари бир-бирига перпендикуляр ва узунликлари 12,4 см ва 15 см. Унинг юзини топинг.
3. Юзи берилган параллелограммнинг юзига тенг бўлган учбурчакни ясанг.
4. Тўртбурчакнинг томонлари 5м, 4м ва 3 м ва 2,5 м. Унинг бир диагонали 4,5 м. Юзини топинг.
   Кўрсатма. Диагоналлари орқали аниқланган икки учбурчакнинг юзларини топиш тавсия қилинади.
5. Учбурчакнинг медианаси бу учбурчакни бир хил юзга эга бўлган икки учбурчак бўлишини исботланг.
6. Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг юзи унинг периметри ярми билан айлана радиуси кўпайтмасига тенг бўлишини исботланг.
7. Айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг периметри 6 дм, юзи 2,4дм^2. Айлана радиусини топинг.
8. Радиуси 3дм бўлган айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг юзи 60 дм^2. Кўпбурчак периметрини топинг.
9. Мунтазам олтибурчакнинг томони a га тенг бўлса, унинг юзини топинг.

10*. Томони a га тенг бўлган мунтазам n бурчакнинг

юзи $S=\frac{na^2}{4}\cdot\frac{\cos\frac{180^0}{n}}{\sin\frac{180^0}{n}}$ (1) формула бўйича аниқланишини

исбот қилинг, S – юз; $n>2$.

11. Томони a га тенг бўлган мунтазам: 1)уч; 2) тўрт; 3) беш; 4) олти; 5) ўн икки бурчакнинг юзини ҳисобланг.

Кўрсатма. 10-масаладаги (1) формуладан фойдаланинг.

12. 11 - масалани $a=4$ учун ҳисобланг.

13. Радиуси Rга тенг бўлган айланага ички чизилган мунтазам

n бурчакнинг юзини $S=nR^2\cdot\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180_0}{n}$ (2)

формула билан ҳисоблаш мумкинлигини исбот қилинг.

14. Радиуси Rга тенг бўлган айланага ички чизилган мунтазам: 1) уч; 2) тўрт; 3) беш; 4) олти; 5) ўн иккибурчакнинг юзини ҳисобланг.

Кўрсатма. 13-масаладаги (2) формулани фойдаланиш тавсия қилинади.

15. 14-масалани R=2 дм учун ҳисобланг.

16*. Радиуси r га тенг бўлган айланага ташқи чизилган

мунтазам n бурчакнинг юзини $S=n\cdot r^2\cdot\frac{\sin\frac{180^0}{n}}{\cos\frac{180^0}{n}}$ (3)

формула орқали ҳисоблаш мумкинлигини исботланг.

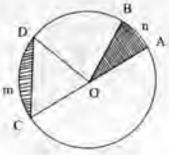
17. Радиуси rга тенг бўлган айланага ташқи чизилган мунтазам: 1) уч; 2) тўрт; 3) беш; 4) олти; 5) етти; 6) саккиз; 7) ўн икки бурчакнинг юзини топинг.

Кўрсатма. 16* - масаладаги (3) формуладан фойдаланинг.

18. 17-масалани r=10 см учун ҳисобланг.

42-§. ДОИРАНИНГ ЮЗИ

Айлана билан доира ўзаро боғланишда. Текисликнинг айлана билан чегараланган бўлаги **доира** деб аталади (130-расм). Демак, доира - бу чизиқ эмас, у текисликнинг қандайдир айлана билан чегараланган бўлаги. Унга кўпгина мисоллар келтириш мумкин. Масалан, доиравий диск, доиравий жетон ва бошқалар (130-расм).



130-расм

Доира айлана билан чегараланганлигидан, айлананинг маркази (O), радиуси (OA) ва диаметри (CA) доиранинг ҳам маркази, радиуси ва диаметри бўлади. Доиранинг радиусини R орқали белгиласак, $OA=R$ бўлади. Демак, айланада ва унинг ичида ётган нуқталар шу айлана билан чегараланган доирада ҳам ётган нуқталар бўлиб ҳисобланади. Унда O маркази ҳам шу доиранинг нуқтаси бўлиб ҳисобланади. Шундай қилиб, доирада ётувчи ҳар қандай M нуқта учун $OM \leq R$ шарт бажарилади.

Доиранинг юзини кўпбурчакнинг юзига ўхшаш қилиб ҳисоблаш мумкин эмас, чунки у эгри чизиқ (айлана) билан чегараланган. Шунинг учун унинг юзини топишнинг осон усулини кўриб чиқамиз. У айланага (доирага) ички чизилган мунтазам n бурчакнинг юзини топишга (41–§, 59-теорема) ва айлана узунлигини (35– §) топишга боғлиқ.

Айланага ички чизилган Q_n мунтазам n бурчакнинг юзи

$S(Q_n)=\frac{1}{2}P\cdot OD$ (1) формуласи билан ҳисобланиши маълум,

бунда P - Q_n мунтазам n бурчакнинг периметри, OD – унинг апофемаси (129-расм).

Агар бу Q_n кўпбурчакнинг томонлари сонини чексиз иккилантирсак, кетма-кет кейинги периметрлар ортиб боради. Демак, n нинг ортиши билан (1) формуланинг асосида Q_n кўпбурчакларнинг юзалари ҳам ортиб боради, улар доира юзига яқинлаша боради, шу билан бирга доира юзидан ортиб кетмайди. Чунки, томонлари сони иккилантирилган кўпбурчаклар доим айлана ичида бўлади.

Демак, айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонини чексиз иккилантириб орттирганда уларга мос келувчи кўпбурчакларнинг юзлари кетма-кетлиги интилган лимит берилган доиранинг юзига тенг бўлади, деб ҳисоблаш мумкин.

Айланага ташқи чизилган кўпбурчакка нисбатан ҳам худди шундай мулоҳаза юритиш мумкин. Бунда ташқи чизилган кўпбурчакнинг томонлари сони чексиз иккилантириб орттирилганда уларга мос келувчи кўпбурчакларнинг юзлари ҳам камайиб боришини ҳисобга олиш керак.

Шундай қилиб, (1) формуладан қуйидагини оламиз:

Q_n кўпбурчак томонларининг сони чексиз иккилантириб орттирилганда P периметри айлананинг узунлигига, OD апофема айлана радиусига, S(Qn) юз доира юзига интилади.

Доира юзини S орқали белгиласак, (1) формуладан

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R \text{ ёки } S = \pi R \qquad (2)$$

бўлади, бунда R - доиранинг радиуси.

Айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг томонлари сони чексиз иккилантирилса, унинг OD апофемаси шу айлананинг радиусига интилишини қуйидагича ҳам кўрсатиш мумкин.

A_1A_2 кесма мунтазам n бурчакнинг бир томони бўлганлиги сабабли, $\angle A_1OA_2 = \frac{360^0}{n}$ – марказий бурчак, $\angle A_1OD = \frac{180^0}{n}$ бўлади (129-расм). Δ ΔA_1OD – тўғри бурчакли учбурчак.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг α ўткир бурчагига ёпишган катетининг гипотенузага нисбати шу бурчакнинг косинусига тенг эканлиги маълум. Унда

$$\frac{OD}{R} = \cos\frac{180^0}{n} \text{ ёки } OD = R \cdot \cos\frac{180^0}{n} \qquad (3)$$

бўлади, бунда $OA_1 = R$ бўлади ва n чексиз ортганда $\frac{180^0}{n}$ бурчак кичрайиб, нолга интилади. Бу ҳолда $\cos\frac{180^0}{n}$ нинг қиймати бирга интилади, бироқ бирдан катта бўла олмайди. Унда (3) формулада OD апофема R га интилади.

Доиранинг икки радиуси билан чегараланган бўлаги унинг **сектори**[1] деб аталади. $\omega(O,R)$ доирада (айланага ўхшаш белгилаймиз) OA ва OB радиусларини ўтказсак, доиранинг OAB бўлаги унинг секторини ташкил қилади (130-расм).

Бу секторга $\angle AOB = \alpha$ марказий бурчаги мос келади, уни секторнинг бурчаги деб атаймиз.

Секторнинг юзи унинг марказий бурчаги орқали аниқланади. Агар 360^0 марказий бурчакка мос келувчи доиранинг юзи $S = \pi R^2$ бўлса α марказий бурчакка мос келувчи секторнинг юзи:

---

[1] Лотинча сўз бўлиб, бўлиб олинувчи маъносини билдиради.

$$Scek = \frac{\pi R^2 \alpha^0}{360^0}$$

(4)

Секторнинг юзи (4) формула билан аниқланади. Доирани кесиб ўтувчи *CD* тўғри чизиқ доирани икки бўлакка бўлади, уларнинг ҳар бири доиранинг **сегменти**[2] деб аталади. У доиранинг *CD* ватари ва *CmD* ёй билан чегараланган қисми сифатида кўрилади (130-расм). Сегментнинг юзи *Scer* орқали белгиланади. Унинг юзини топиш учун *CmDO* секторнинг юзидан *OCD* учбурчакнинг юзини айирамиз:

$$S_{сег} = S_{сек}(CmDO) \quad S(\Delta COD) \qquad (5)$$

МАШҚЛАР

1. Доиранинг юзи: 1) 15см, 2) 5 дм; 3) 4,6 м. Унинг юзини ҳисобланг ($\pi \approx 3{,}14$ деб олинг).
2. Доиранинг диаметри: 1) 13м; 2) 20 см; 3) 12,4 дм. Унинг юзини топинг.
3. Агар доиранинг юзи: 1) 200,96 дм^2; 2) 7,065 м^2 бўлса, унинг радиусини ҳисобланг.
4. Диаметри 1 дм бўлган ҳаво насоси доирасининг юзини ҳисобланг.
5. Устунни ўраб боғлаган ипнинг узунлиги 1,6м. Устунни кесганда доира шаклида бўлса, унинг юзини ҳисобланг.
6. Айлананинг узунлиги 18 см бўлса, у чегаралаб турган доиранинг юзини топинг.
7. Доиранинг юзи 113,04 дм^2 бўлса, ўраб турган айлана узунлигини топинг.
8. Агар доиранинг юзи унга ташқи чизилган квадрат юзидан 55,04 дм^2 кичик бўлса, доиранинг юзини топинг.
9. Мунтазам: 1) уч; 2) тўрт; 3) олти; 4) ўн иккибурчакка ички ва ташқи чизилган доиралар юзаларининг нисбатини топинг. **Кўрсатма**. 41- § даги 13 - ва 16 - масалаларнинг (2) ва (3) формулаларидан фойдаланинг.
10. Радиуслари 18 см ва 12 см, марказлари битта нуқтада бўлган икки айлана орқали чегараланган халқанинг юзини топинг.
11. Радиуси 8см, бурчаги: 1) 24^0; 2) 36^0; 3) 120^0 бўлган секторнинг юзини топинг.
12. Агар секторнинг юзи *Q*, бурчаги: 1) 75^0; 2) $2^0 30'$; 3) 150^0 бўлса,

---

[2] Лотинча сўз бўлиб, кесма, бўлак, қисм деган маънони билдиради.

секторнинг радиусини ҳисобланг.

13. Секторнинг радиуси 3 см, юзи 6,28 $см^2$. Марказий бурчагини топинг.
14. Радиуси Rга тенг бўлган доиранинг: 1) 90^0; 2) 60^0; 3) 45^0; 4) 30^0 ёйига тўғри келувчи сегментнинг юзини топинг.
15. Ватари aга тенг бўлган ёй: 1) 120^0; 2) 190^0; 3) 60^0 бўлса, унга мос келувчи сегмент юзини топинг.

VIII БОБ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Юз бирлиги қандай танлаб олинади?
2. Юзнинг сон қийматини қандай тушуниш мумкин?
3. Юз катталиги нимага боғлиқ?
4. Кўпбурчакларнинг йиғиндиси деганда нимани тушунасиз?
5. Содда кўпбурчакнинг юзини доим ҳисоблаб топиш мумкинлигини тушунтиринг.
6. Кўпбурчакнинг юзи қандай аниқланади?
7. Тўғри тўртбурчакнинг юзи қандай топилади?
8. Параллелограммнинг юзи қандай йўл билан топилади?
9. Учбурчакнинг юзи қандай топилади?
10. Трапециянинг юзи нимага тенг?
11. Айланага ташқи чизилган кўпбурчакнинг юзи нимага тенг?
12. Мунтазам кўпбурчакнинг юзи қандай аниқланади?
13. Бир хил ясалган кўпбурчаклар юзларининг нисбати нимага тенг? У қандай аниқланади?
14. Доиранинг юзини аниқлаш йўлини айтиб беринг.
15. Секторнинг, сегментнинг юзлари қандай топилади?

VIII БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 30 м, юзи 56 $м^2$ бўлса, унинг томонларини топинг.
2. Тенг ёнли трапеция айланага ташқи чизилган. Ён томонлари уриниш нуқталари орқали 4 см ва 9 см га тенг бурчакларга бўлинади. Трапециянинг юзини топинг.
3. Асослари 20 дм ва 60 дм, ён томонлари 13 дм ва 37 дм бўлган трапециянинг юзини топинг.
4. Учбурчакнинг медианалари уни юзалари тенг бўлган олтита учбурчакка бўлишини исботланг.
5. Трапеция диагоналлари орқали тўрт бўлакка бўлинган. Ён томонларига ёпишган бўлаклари бир хил катталикда бўлишини исбот қилинг.

6. Учбурчак асосига параллел бўлган тўғри чизиқ уни юзалари тенг бўлган икки бўлакка ажратади. Бу тўғри чизиқ учбурчакнинг ён томонларини қандай нисбатда бўлади?

7. Тенг ёнли учбурчак асосининг ихтиёрий нуқтадан томонларигача бўлган оралиқларнинг йиғиндиси асосининг учидан туширилган баландлигига тенг бўлишини исботланг.

8. Тенг ёнли учбурчакнинг ичида ётган ихтиёрий нуқтадан томонларигача бўлган оралиқларнинг йиғиндиси унинг баландлигига тенг бўлишини исбот қилинг.

9. Айлана радиуси Rга тенг. Ташқи (ички) чизилган тенг томонли учбурчакнинг юзини топинг.

10. Ромбнинг диагоналлари m ва *n* бўлса, унинг юзи нимага тенг?

11. Параллелограммнинг диагоналлари уни бир хил катталикдаги тўртта учбурчакка бўлишини исбот қилинг.

12. Юзси 6 см^2 бўлган учбурчак берилган. Унинг томонлари тенг иккига бўлиниб, бўлиниш нуқталари кетма-кет туташтирилган. Ҳосил бўлган учбурчакнинг томонлари яна тенг иккига бўлиниб, яна бўлиниш нуқталари кетма-кет туташтирилган. Охирги учбурчакнинг юзини топинг.

13. Квадратга ташқи чизилган доира юзининг унга ички чизилган доиранинг юзига нисбатини топинг.

14. Икки доира юзининг нисбати 2:3га тенг. Уларнинг айланалари узунликларининг нисбатини топинг.

15. Мунтазам учбурчакка ташқи чизилган ва ички чизилган доиранинг юзлари нисбатини топинг.

16. Радиуси 36см, бурчаги 120^0 бўлган секторнинг юзини топинг.

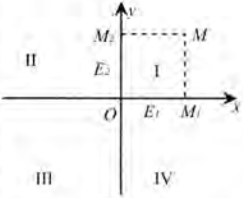
17. Радиуси *r* га тенг, бурчаги 60^0 бўлган сегментнинг юзини топинг.

18. Радиуси Rга тенг бўлган доирага ички чизилган: 1) квадратнинг; 2) мунтазам учбурчакнинг; 3) мунтазам олти бурчакнинг ташқарисида ётган доира бўлакларининг юзларини топинг.

9-СИНФ

IX БОБ. ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ВЕКТОРЛАР

43-§. ТЕКИСЛИКДА НУҚТА КООРДИНАТАЛАРИ



131-расм

Текисликда бир-бирига перпендикуляр бўлган ва O нуқтада кесишувчи икки ўқни олайлик. Уларнинг бири горизонтал, иккинчиси вертикал бўлсин. Горизонтал ўқни x орқали белгилаб, **абцисса ўқи** деб атаймиз, вертикал ўқни y орқали белгилаб, **ордината ўқи** деб атаймиз. Уларнинг йўналишлари стрелка билан кўрсатилган (131-расм). x ва y ўқлари координата ўқлари деб аталади. O нуқта **координата боши** деб аталади.

Бу ўқлар бўйича олинувчи масштаб бирликлари бир хил бўлсин, уни e орқали белгиласак, $OE_1=OE_2=e$ бўлади. Умумий координаталар боши ва масштаб бирлигига эга бўлган ва ўзаро перпендикуляр бўлган икки ўқ текисликдаги тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини ёки координаталар текислигини ташкил қилади. Биз бундан кейин фақат тўғри бурчакли декарт координаталар системасидан фойдаланамиз. Шунинг учун xOy координаталар системаси деб қисқача белгилаб ёзамиз.

Координата ўқлари текисликни тўртта бўлакка бўлади. Уларни чораклар деб атаймиз.

Шу координаталар системасига нисбатан текисликдаги ҳар қандай нуқта ҳолатини аниқлаймиз.

Текисликдаги ихтиёрий M нуқтани олайлик. Бу нуқтадан координата ўқларига MM_1 ва MM_2 перпендикуляр ўтказамиз. Унда M_1 нуқта M нуқтанинг x ўқдаги проекцияси бўлади.

---

[1] Р. Декарт (1596-1650) француз математиги, координаталар методининг асосчиси

Худди шундай M нуқтанинг y ўқидаги проекцияси M_2 нуқта бўлади. Унда $OM_1 = x \cdot e$; $OM_2 = y \cdot e$ бўладиган x, y сонларини топиш мумкин.

Шундай қилиб, текисликда M нуқта берилса, олинган координаталар системасига нисбатан унга мос келувчи x, y сонлари топилади, улар мусбат ёки манфий қийматларга эга бўлиши мумкин.

Аксинча, агар x, y сонлар берилса, унда берилган системага нисбатан шу сонларга мос келувчи M нуқтани топиш мумкин. Унинг учун x ўқида O нуқтадан бошлаб, e кесмани x марта ўлчаб қўйиб M_1 нуқтани, y ўқига ҳам ўша кесмани y марта ўлчаб қўйиб, M_2 нуқтани топамиз. M_1, M_2 нуқталардан x, y ўқларига параллел тўғри чизиқлар ўтказсак, уларнинг кесишиш нуқтаси M нуқтани ифодалайди. Демак, x, y сонлари M нуқтанинг ҳолатини аниқловчи сонлар бўлиб ҳисобланади.

Бунда x сони M нуқтанинг абциссаси, y - ординатаси деб аталади. Умумий ҳолда, x, y сонлари M нуқтанинг координаталари деб аталади ва қуйидагича белгиланади (нуқтани ёзиб, координаталари қавслар ичига орасига нуқтали вергул қўйиб ёзилади): $M(x; y)$.

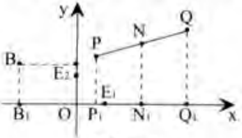
Шундай қилиб, текисликда ҳар қандай нуқтага x ва y, икки соннинг тартиб билан ёзилган жуфти мос келади, аксинча, ҳар қандай x ва y икки сони текисликда фақат битта нуқтани аниқлайди.

Демак, масалада нуқта берилган бўлса, унда унинг координаталари берилган бўлади: нуқтани топиш керак бўлса, унда унинг координаталарини топиш керак деб тушунилади.

Биз M нуқтани I -чоракда олдик. Бунда $x > 0$, $y > 0$; II-чоракда $x < 0$, $y > 0$; III чоракда $x < 0$, $y < 0$; IV чоракда $x > 0$, $y < 0$ бўлади (131-расм). 0 нуқтанинг координаталари $x = 0$; $y = 0$ бўлиши тушунарли: O(0;0).

Мисол. Координаталар системасида $A(4;2)$, $B(-2; 1,5)$, $C(2;-2)$, $D(0;3)$ нуқталарини ясанг.

Ечиш: $B(-2; 1,5)$ нуқтани ясаб кўрамиз.



132-расм

Координаталар системасини олиб, ихтиёрий $e = OE_1 = OE_2$ масштаб бирликни белгилаймиз (132-расм). x ўқида O нуқтадан чапга 2 марта, у ўқида 0дан юқорига 1,5 марта ўлчаб қўйиб, мос ҳолда B_1 ва B_2 нуқталарни топамиз. B_1 ва B_2 нуқталардан координата ўқларига параллел тўғри чизиқларни ўтказсак, уларнинг кесишиш нуқтаси Bни ифодалайди. A, C, D нуқталарни ҳам худди шундай йўл билан ясаш мумкин. Агар $P(x_1;y_1)$ ва $Q(x_2;y_2)$ нуқталар берилса, унда PQ кесманинг ўртасида ётган N нуқтанинг координаталарини топиш мумкин. Бу нуқталар 132-расмдагидек жойлашсин, деб ҳисоблайлик.

N нуқтанинг координаталарини x ва y билан белгилаймиз. P, Q, N нуқталарнинг x ўқидаги проекциялари мос ҳолда P_1, Q_1, N_1 бўлсин. Унда $OP_1=x_1$, $QQ_1=x_2$; $ON_1=x$ бўлиши маълум. Шартга кўра $PN=NQ$ бўлади. Унда $PP_1 \| QQ_1 \| NN_1$ бўлганлиги сабабли берилган кесмаларга Фалес теоремасини қўлласак, $P_1N_1=N_1Q_1$ бўлади. Натижада $P_1N_1= ON_1-OP_1=x-x_1$ $N_1Q_1=OQ_1-ON_1=x_2-x$ бўлади.

Бироқ, P ва Q нуқталарнинг берилишига қараб P_1N_1, N_1Q_1 ларнинг қийматлари мусбат ёки манфий бўлиб қолиши мумкин. Шунинг учун уларнинг модулларини оламиз. Унда юқоридаги шарт бўйича $|P_1N_1| = |N_1Q_1|$ бўлади. Бундан $x - x_1 = x_2 - x$ ёки $x_1 - x = x - x_2$ бўлиши маълум. Натижада $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ бўлишини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, PQ кесма ўртасидаги N нуқтанинг координаталари $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ (1) тенгликлар орқали аниқланади.

МАШҚЛАР

1. Иккала ўқда ҳам бирлик кесмани 1 см деб олиб, қуйидаги нуқталарни координаталар системасида ясанг.
   A (4;3), B (-2; 5); C (-3;-1), D (7;-4), E(-5;0); F(0;-5), K (0;0).

2. Томонининг узунлиги 6 бирлик бўлган квадратнинг бир томони абсцисса ўқида ётади. Координаталар боши шу томон ўртасида ётса, квадрат учларининг координаталарини топинг. Квадрат – абсцисса ўқидан: а) юқорида; б) пастки томонларида ётган ҳолларни кўриб чиқинг.
3. *D(3;-2)* нуқта берилган. Бу нуқтанинг координаталар ўқидаги проекциялари қандай координаталарга эга бўлади?
4. Координата ўқлари ва *A(-2;3)* нуқтадан ўқларга туширилган перпендикулярлар орқали ясалган тўғри тўртбурчак периметрини топинг.
5. *A (-3; 4), B(2;-2)* нуқталар берилган. *AB* кесманинг ўртасида ётган нуқтани топинг.

   Кўрсатма. (1) формулалардан фойдаланинг.
6. Учбурчакнинг *A(2;1), B(-6; 7), C(2;-2)* учлари берилган. Унинг томонлари ўрталарини топинг.
7. Параллелограммнинг кетма-кет *A(-3;5), B(1,7)* учлари ва унинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси *M(1;1)* берилган. Қолган икки учини топинг.

   Кўрсатма. 5-масаланинг ечилишини эсга олинг.

44-§. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

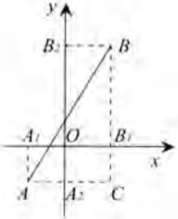
Текисликдаги координаталар системасига нисбатан $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нуқталар берилсин (133-расм). Улар орасидаги масофани координата бўйича аниқлаймиз. *A* ва *B* нуқталардан координата ўқларига перпендикулярлар тушириб, уларнинг кесишиш нуқтасини *C* деб белгилаб, *ABC* тўғри бурчакли учбурчакка эга бўламиз. Унда Пифагор теоремасига асосан, $AB^2=AC^2+CB^2$ бўлади.

Лекин,

$$AC = A_1B_1 = |x_2 - x_1|, CB = A_2B_2 = |y_2 - y_1|$$

бўлиши маълум. Унда

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \qquad (1)$$



133-расм

бўлади. Агар координата боши *O(0;0)* нуқтадан ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтагача бўлган масофани топиш талаб қилинса, унда (1) формула қуйидагидек ёзилади:

$$OM^2= x^2+ y^2 \qquad (2)$$

Мисол: $A(-4;5)$ ва $B(1;-7)$ нуқталари орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Изланаётган масофа (1) формула билан ҳисобланади: $x_1=-4,\ y_1=5;\ x_2=1;\ y_2=-7$ бўлганлиги сабабли

$$AB^2=(1+4)^2+(-7-5)^2=169,\ AB=13$$ чизиқли бирлик.

МАШҚЛАР

1. xOy системаси берилган: а) $A(-1;4)$ ва $B(5;-4)$; б) $C(3;8)$ ва $D(-1;5)$ нуқталари орасидаги масофани топинг.
2. Координаталар бошидан M(-4;3) нуқтагача бўлган масофани топинг.
3. $K(5;-3)$ ва $L(-1;0)$ нуқталари билан чегараланган кесма узунлигини топинг.
4. $A(2;-3)$, $B(-4;1)$ ва $C(1;-1)$ нуқталари берилган. Бу нуқталар бир тўғри чизиқда ётадими?

   Кўрсатма. Нуқталар орасидаги масофаларни топиб таққосланг: $AC+CB=AB$.
5. Учбурчакнинг учлари $A(2;1)$; $B(-6;\ 7)$ ва $C(2;-2)$ берилган. Учбурчакнинг периметри ва медианаларини топинг.

   Кўрсатма. Медианаларни топиш учун учбурчак томонлари ўрталарининг координаталарини топинг.
6. Учлари $A(2;3)$, $B(-1;\ -1)$; $C(3;-4)$ бўлган учбурчакнинг тенг ёнли эканлигини исботланг.

   Кўрсатма. Томонлари узунликларини таққосланг.
7. $A(4;-6)$ нуқтадан 5 бирлик узоқликда ётувчи ордината ўқидаги нуқтани топинг.
8. Учлари $A(0;1)$; $B(4;3)$; $C(5;1)$ $D(1;-1)$ нуқталарида ётган тўртбурчак тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

   Кўрсатма. Томонлари ва диагоналлари узунликларини таққосланг.
9. Учлари $E(-2;0)$; $F(2;2)$; $M(4;-2)$ ва $N(0;-4)$ нуқталарида ётган тўртбурчак квадрат эканлигини исботланг.

45-§. АЙЛАНА ТЕНГЛАМАСИ

Чизиқнинг барча нуқталари координаталари қандайдир бир тенгламани қаноатлантирса, унда бу тенглама берилган чизиқнинг (айлананинг) тенгламаси деб аталади.

Умумий ҳолда $F(x,y)=0$ кўринишда ёзилади. Бунда F x ва y лар билан бажарилувчи амалларни ифодалайди.

xOy системага нисбатан радиуси Rга тенг бўлган ва маркази C(a,b) нуқтада ётган айлана берилсин (134-расм). Бу айлананинг тенгламасини тузамиз. Шу мақсадда айлананинг ихтиёрий M(x,y) нуқтасини белгилаймиз.

Бу айланани C(a,b) марказдан R оралиқда ётган нуқталарнинг геометрик ўрни (тўплами) деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун $CM=R$ ёки $CM^2=R^2$ деб оламиз. Унда икки нуқта орасидаги масофани аниқлаш формуласи бўйича

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

га эга бўламиз. Бу тенглама берилган айлана тенгламаси бўлиб ҳисобланади, чунки айлананинг ҳар қандай нуқтасининг координаталари (1) тенгламани қаноатлантиради. Агар C(a,b) марказ координаталар бошида бўлса, унда $a=0$; $b=0$ бўлиб қолади. Унда (1)дан қуйидагини оламиз:

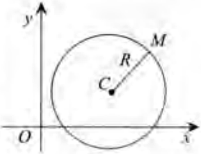
$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$

Бу маркази координаталар бошида ётувчи, радиуси Rга тенг бўлган айлананинг тенгламасидир.

Масала. Маркази $C(4; -2)$ нуқтада ётувчи ва радиуси 3га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг. Бу айлана A (-1; 5) нуқта орқали ўтадими?

Ечиш. Масалада берилганлар бўйича $a=4$, $b=-2$; $R=3$. Демак, (1) тенглама бўйича $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ бўлади. Бу тенглама изланаётган айлана тенгламаси бўлади. Айлана $A(-1;5)$ нуқта орқали ўтишини текшириш учун айлана тенгламасидан x y ларнинг ўрнига A нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$(-1-4)^2+(5+2)^2 \neq 9$. Демак, берилган айлана A нуқта орқали ўтмайди.



134-расм

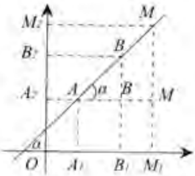
МАШҚЛАР

1. Маркази O нуқтада ва радиуси $R=5$ бўлган айлананинг тенгламасини ёзинг.
2. Айлана $x^2+y^2=16$ тенглама билан берилган. Шу айлана радиусини топинг ва айланани xOy системасида чизинг.
3. O нуқтадан 1,5 бирлик узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрнини ифодаловчи тенгламани ёзинг. Чизмада кўрсатинг.

4. $A(3;-4)$; $B(10;3)$; $C(-1;3)$; $D(0;5)$ нуқталарнинг қайси бири $x^2+y^2-25=0$ тенглама билан берилган айланада ётади?
5. $x^2+y^2-64=0$ айлананинг радиусини топинг.
6. Маркази $C(-4;0)$ нуқтада ётиб, радиуси 3га тенг бўлган айлананинг тенгламасини ёзинг. Уни xOy системада чизинг.
7. Маркази $C(2;-1)$ нуқтада ётиб, радиуси 2га тенг бўлган айлана тенгламасини тузинг. $A(2;-3)$ нуқта шу айланада ётадими?
8*. x ўқининг $B(3;0)$ нуқтага уриниб ўтувчи ва радиуси 2,5га тенг бўлган айлана тенгламасини тузинг.

46-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

xOy координаталар системасида $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталари берилсин (135-расм). Бу икки нуқта фақат битта тўғри чизиқни аниқлайди. Шу тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз. AB тўғри чизиқнинг координаталар ўқига параллел эмас, деб ҳисоблайлик. Унда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ бўлиши тушунарли.



135-расм

AB тўғри чизиқни x ўқи билан ҳосил қилган бурчагини α орқали белгилайлик. Унда $AB'B$ тўғри бурчакли учбурчакдан (26–§)

$$tg\alpha=\frac{B'B}{AB'}=\frac{A_2B_2}{A_1B_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(1)

нисбатни ёза оламиз. $\angle B\ AB=\alpha$. (1) нисбат тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициенти** деб аталади. Баъзида бу нисбат $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$ деб белгиланади. AB тўғри чизиқдан ихтиёрий $M(x;y)$ нуқтани олайлик. $MM'A$ тўғри бурчакли учбурчак учун ҳам

$$tg\alpha=\frac{M'M}{M'A}=\frac{M_2A_2}{M_1A_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

нисбатни ёзамиз. Бунда M нуқтани AB тўғри чизиқнинг ихтиёрий еридан олсак ҳам. (2) нисбат тўғри бўлади ($OM_1=x$, $OM_2=y$ эканлиги ҳисобга олинди).

(1), (2) тенгликлардан

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(3)

деб ёза оламиз. Нисбатлар тенглигининг асосида

$$(y-y_1)\ (x_1-x_2) = (x-x_1)\ (y_2-y_1) \qquad (3')$$

ёки $(y_2-y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2-x_1)y_1 - (y_2-y_1)x_1=0$ бўлади.

Бу икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси x ва y ўзгарувчиларга нисбатан 1-даражада. Демак, ихтиёрий 1-даражадаги

$$ax + by - c = 0 \qquad (4)$$

ёки

$$y = kx + b \qquad (5)$$

кўринишидаги тенглама (a, b, c - берилган сонлар) тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

Энди қуйидаги ҳолларни кўриб чиқайлик.

1) AB тўғри чизиқ x ўқига параллел бўлсин. Унда $y_2=y_1$ бўлади, ёки $y_2-y_1=0$ бўлади. (3) дан $y=y_1$ бўлиб қолади. Демак, $y=y_1$ ёки умумий ҳолда $y=b$ (5) тенглама x ўқига параллел тўғри чизиқ тенгламаси бўлиб қолади.

2) AB тўғри чизиқ y ўқига параллел бўлса,

$$x=x_1 \text{ ёки } x=a \qquad (6)$$

бўлади. Бу y ўқига параллел тўғри чизиқнинг тенгламаси.

Мисол. *$A(-3;\ 5)$, $B(2;-4)$* нуқталари орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (3) тенгламадан фойдалансак,

$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{-4-5}$ бўлади, чунки берилиши бўйича

$x_1= -3;\ y_1=5;\ x_2=2;\ y_2= -4$ бўлади. Натижада $9x+5y+2=0$ бўлади. Бу изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси. Бу тенглама берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси эканлигини тушуниш қийин эмас. Бунинг учун берилган нуқталарнинг координаталари охирги тенгламани қаноатлантиришини текшириш керак.

МАШҚЛАР

1. $A(4;-5)$ ва $B(-1;2)$ нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.
   Кўрсатма. Нуқталарнинг геометрик ўрнига мос нуқтани ўзгарувчили $M(x,y)$ нуқта орқали белгилаб, $MA=MB$ шартни қўлланинг.
2. Координата ўқларидан бир хил узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрнининг тенгламасини ёзинг.
3. $A(9;-3)$ ва $B(-6;1)$ нуқталари орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.
4. Учбурчакнинг учлари $A(-2;2)$, $B(1;4)$, $C(0;0)$. Унинг томонлари ва медианаларининг тенгламаларини ёзинг.
   Кўрсатма. Медианаларининг тенгламасини тузишда учбурчак томонларининг тенг ўрталарини топиб олинг.

5*. x ўқини координаталар бошидан 4 бирлик узоқликда кесиб, $M(8;5)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг. Чизмада кўрсатинг. Масаланинг қанча ечими бор?

6. Тўғри чизиқ $2x-3y+6=0$ тенглама билан берилган. Бу тўғри чизиқ координата ўқларини координата бошидан қандай кесмаларда кесиб ўтишини топинг.
7. $A(-2;1)$; $B(3;\frac{1}{3})$, $C(0;\ 2\frac{1}{3})$; $D(1;2)$ ва $E(-3\frac{1}{3};\ 0)$ нуқталари берилган. Бу нуқталарнинг қайсиниси $2x-3y+7=0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқда ётади?
8. Қуйидаги тўғри чизиқларни ясанг: $3x-2=0$; $2y+3=0$; $x+y=0$; $2x+5y=0$; $x+2y+3=0$ ва $3x+4y-12=0$.
   Кўрсатма. Тўғри чизиқни ясаш учун унинг икки нуқтасини топиб олиш етарли. Масалан, $3x+4y-12=0$ тенгламаси билан берилган тўғри чизиқни ясаш учун ихтиёрий икки нуқтасини топиб оламиз. $x=0$ деб ҳисоблайлик, унда $3\cdot 0+4y-12=0$ ёки $y=3$ бўлади, натижада $A(0;3)$ нуқта топилди. Энди $y=0$ бўлсин, унда $3x+4\cdot 0-12=0$ ёки $x=4$ бўлади, яъни $B(4;0)$ нуқта топилди. A,B нуқталарини ясаб, улар орқали тўғри чизиқ чизамиз.

47-§. ВЕКТОРЛАР

Биз физика, механика, астрономия ва яна бошқа фанларни ўрганишда икки турдаги катталикларга дуч келдик. Биринчиси: масса, узунлик, вақт, ҳажм ва бошқалар. Бу катталиклар сон қиймати билангина аниқланади. Уларни **скаляр**[1] катталиклар

---

[1] Скаляр лотинча scalaris - босқичли деган маънони билдиради.

деб атаймиз. Иккинчиси: куч, тезлик, тезланиш ва бошқалар. Бу катталикларни аниқлаш учун фақат уларнинг сон (скаляр) қийматлари берилиши етарли эмас. Масалан, кучнинг катталиги берилиб, лекин қайси йўналишда таъсир қилаётганлиги кўрсатилмаса, унинг таъсирини тўлиқ аниқлаш мумкин эмас. Демак, бу катталикларни сон қиймати билан бирга унинг йўналиши ҳам берилиши керак. Бундай катталиклар **вектор[1] катталиклар** деб аталади. Унинг геометрик шаклини кўз олдига келтириш учун берилган узунликдаги кесмани олиб, унинг учига стрелка қўйилади.

Йўналтирилган кесма **вектор** деб аталади. Вектор икки катта ёки битта кичик лотин ҳарфи билан белгиланади ва устига стрелка қўйиб ёзилади. Масалан, $\overrightarrow{AB}$ ёки $\vec{a}$ деб белгиланади.

Векторни ифодаловчи кесманинг узунлигини ёки векторнинг боши ва охиридаги икки нуқта орасидаги масофа шу векторнинг узунлигини аниқлайди.

Вектор узунлигига тенг бўлган мусбат сон векторнинг **модули** ёки абсолют қиймати деб аталади ва $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ёки AB кўринишда белгиланади.

Агар вектор бир ҳарф $\vec{a}$ билан белгиланса, унда унинг узунлиги $|\vec{a}|$ ёки a кўринишида ёзилади.

Агар векторнинг боши ва охири устма-уст тушса, унда бу вектор **нол-вектор** деб аталади. У $\vec{O}$ кўринишида белгиланади. Унинг узунлиги нолга тенг, йўналиши эса номаълум.

Таъриф. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг: 1) узунликлари тенг ва 2) йўналишлари бир хил бўлса, унда улар тенг векторлар деб аталади ва $\vec{a} = \vec{b}$ кўринишида ёзилади (136-расм).

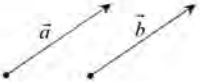
Агар бу таърифдаги икки шартнинг бири бажарилмай қолса, унда улар тенг бўлмайди. Бу таъриф асосида векторни бир жойдан иккинчи жойга йўналиши ва катталигини ўзгартирмасдан кўчириш мумкин. Чиндан ҳам a векторни

---

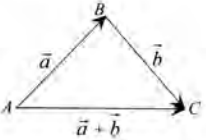
[1] Вектор лотинча vector - кўчириш деган маънони билдиради.

қандайдир A нуқтага катталиги ва йўналишини ўзгартирмасдан кўчирсак, $\overrightarrow{AB}$ векторни оламиз (137-расм) ва улар таъриф шартини қаноатлантирганлиги сабабли $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ бўлади.

Агар векторнинг узунлиги бирга тенг бўлса, унда бу вектор бирлик вектор деб аталади. $\vec{e}$ бирлик вектор бўлса, $|\vec{e}| = 1$ бўлади.



136-расм



137-расм

МАШҚЛАР

1. $\vec{a}$ ва C нуқта берилган. $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$ векторни ясанг.
2. Квадрат берилган. Томонлари бўйича тенг векторларни белгилаб кўрсатинг (чизмада).
3. $ABCD$ параллелограммнинг томонлари бўйича $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторлари берилган. а) $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ бўлишини исботланг; б) $\overrightarrow{CD}$ ва $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\overrightarrow{DA}$ векторлар тенг бўладими?
4. *ABCДEF* мунтазам олтибурчак берилган. Томонлари бўйича тенг векторларни кўрсатинг. $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{m}$ бўлса, $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}$ векторларини топинг.
5. Агар 4-масаладаги олтибурчакка ташқи чизилган айлана диаметри 6см бўлса, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{m}$ векторларнинг модулларини ёзинг.

48-§. ВЕКТОРЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

48.1. ВЕКТОРЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган. Бу икки векторнинг йиғиндисини топинг. Бунинг учун $\vec{a}$ векторнинг катталиги ва йўналишини ўзгартирмасдан ихтиёрий олинган *A* нуқтага кўчирамиз (137-расм). Унда $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ бўлади. Ундан кейин $\vec{b}$ векторнинг бошини *B* нуқтага устма-уст қўйиб, йўналишини ўзгартирмасдан кўчирамиз. Унда $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ бўлади. $\vec{a}$ векторнинг боши *A* нуқтани $\vec{b}$ векторнинг охирги нуқтаси *C* билан туташтирсак, $\overrightarrow{AC}$ вектори берилган векторларнинг йиғиндисини ифодалайди.

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

Бундай усул билан ихтиёрий миқдордаги векторларнинг йиғиндисини топиш мумкин.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари бир хил бўлиб, **қарама-қарши** йўналишда бўлса, унда улар қарама-қарши векторлар деб аталади. Қарама-қарши векторларни белгилаш учун векторнинг олдига «минус» белгиси қўйилади. Масалан, $-\vec{a}$ вектори $\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор бўлади.

Векторларни қўшишнинг қуйидаги хоссалари бор:

1. $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ (1)

2. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (2)

3. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (3)

(векторлар йиғиндиси қўшиш амалининг ўрин алмаштириш қонунига бўйсунади).

4. Векторларнинг йиғиндиси қўшиш амалининг ассоциативлик (гуруҳлаш) қонунига бўйсунади.

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

48.2. ВЕКТОРЛАРНИНГ АЙИРМАСИ

Векторларнинг айирмасини кўриб чиқамиз.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг айирмасини $\vec{a}-\vec{b}$ деб, $\vec{b}$ векторга қўшганда $\vec{a}$ векторни берувчи $\vec{u}$ векторга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b},$$

бунда $\vec{a}=\vec{b}+\vec{u}$ бўлади.

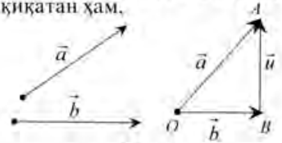
Берилган икки векторнинг айирмасини чизмада кўрсатиш учун берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларини ихтиёрий O нуқтага йўналишини ва катталигини ўзгартирмасдан кўчирамиз. Унда $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}+\vec{b}$ бўлади (138-расм).

Айрилувчи $\vec{b}$ векторининг охирги B нуқтасини камаювчи $\vec{a}$ векторининг охири A нуқтаси билан туташтириб, $\overrightarrow{BA}$ векторни ҳосил қиламиз. У берилган икки векторнинг айирмасини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{b}+\vec{u}=\vec{a}$$

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$$



138-расм

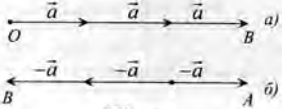
48.3. ВЕКТОРНИ СОНГА КЎПАЙТИРИШ

$\vec{a}$ вектор берилсин. Агар $\vec{a}$ векторни уч марта қўшсак, қандайдир $\vec{b}$ векторни оламиз (139-расм).

Бу охирги тенгликни $\vec{b}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}, \vec{b}=3\vec{a}$ деб ёзиш мумкин. Демак, $\vec{a}$ векторни 3 сонига кўпайтириб, $\vec{b}$ векторни ҳосил қилдик. Бунда $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ бўлиб, бу векторлар бир тўғри чизиқда ётади ва йўналишлари бир хил, $\vec{b}$ векторнинг узунлиги $\vec{a}$ вектор узунлигидан 3 марта катта.

Энди - $\vec{a}$ векторини икки марта қўшамиз (бунда - $\vec{a}$ вектори $\vec{a}$ векторига қарама-қарши эканлиги маълум). Натижада, $\vec{b}$ векторни ҳосил қиламиз (139-расм), яъни

$$\vec{b}_1 = (-\vec{a}) + (-\vec{a})$$



139-расм

Буни деб $\vec{b}_1 = 2(-\vec{a}) = -2\vec{a}$ деб ёзиш мумкин. Бунда $\vec{OA} = \vec{a}, -\vec{a}_1 = \vec{OA}_1, \vec{b}_1 = \vec{OB}_1$ бўлиб, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлари бир тўғри чизиқда ётади, уларнинг йўналишлари қарама-қарши. $\vec{b}_1$ векторнинг узунлиги $\vec{a}$ векторнинг узунлигидан $|-2| = 2$ марта катта.

Демак, векторни сонга кўпайтириш тенг векторларни қўшиш сифатида қаралади.

Умумий ҳолда $\vec{a}$ векторни k сонига кўпайтирсак, унда $\vec{b}$ векторни оламиз:

$$\vec{b}_1 = \left|-\vec{a}\right| + \left|-\vec{a}\right| \tag{1}$$

Бироқ $k>0$ бўлганда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг йўналишлари бир хил, $k<0$ бўлганда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг йўналишлари қарама-қарши бўлади. Бунда k ихтиёрий сон бўлиши мумкин. Иккала ҳолда ҳам $\vec{b}$ векторнинг катталиги $\vec{a}$ векторининг катталигидан $|k|$ марта катта бўлади.

Агар икки вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, унда улар **коллинеар векторлар** деб аталади. Демак, (1) тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлари коллинеар векторлар бўлади.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

1. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
2. $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
3. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
4. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

5. $k\cdot(\ell\cdot\vec{a})=(k\cdot\ell)\vec{a}$;
6. $(k+\ell)\vec{a}=k\vec{a}+\ell\vec{a}$;
7. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

(бунда k, ℓ - сонлар).

48.4. ВЕКТОРЛАРНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

Икки векторни текисликдаги тўғри бурчакли декарт координаталар системасига нисбатан қараб қўрайлик.

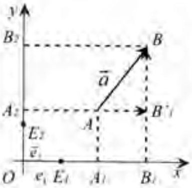
Координата ўқлари бўйича йўналган бирлик $\vec{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$ ва $\vec{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$ векторларни олайлик, ёки $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ бўлсин (140-расм).

Текисликда ихтиёрий $\vec{a}$ вектор берилсин. Бу векторнинг x ўқидаги проекцияси A_1B_1, y ўқидаги проекцияси A_2B_2 бўлсин: $a_1=A_1B_1$, $a_2=A_2B_2$ орқали белгилайлик.

$\vec{a}$ векторни $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ бирлик векторлар бўйича ёзиш мумкин. Агар A_1B_1 кесмани вектор сифатида қарасак, унда уни $\overline{A_1B_1}=a_1\cdot\vec{e}_1$ деб ёзиш мумкин. Худди шундай $\overline{A_2B_2}=a_2\cdot\vec{e}_2$ бўлиши тушунарли. Бироқ, векторларни қўшиш қоидасига кўра $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1^{\prime}}+\overrightarrow{B_1^{\prime}B}$. Шунингдек, $\overrightarrow{AB_1^{\prime}}=\overrightarrow{A_1B_1}$; $\overrightarrow{B_1^{\prime}B}=\overrightarrow{A_2B_2}$ бўлганлиги сабабли,

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2 \qquad (2)$$

бўлади.



140-расм

Бунда a_1, a_2 сонлар $\vec{a}$ векторнинг координата ўқлари бўйича координаталари деб аталади ва қуйидагича белгиланади: $\vec{a}(a_1a_2)$. a_1 сони $\vec{a}$ векторнинг абсциссаси, a_2 - унинг ординатаси бўлади.

Агар xOy координаталар системасига нисбатан $\vec{a}$ векторнинг боши ва охирги координаталари берилса, унда бу векторнинг координаталарини топиш мумкин. $A(x_1;y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ берилсин. $A_1B_1=x_2-x_1$; $A_2B_2=y_2-y_1$ бўлиши маълум. Ўнда

$$a_1 = x_2 - x_1;\ a_2 - y_2 - y_1 \tag{4}$$

ёки $$\vec{a} = \overline{AB} =(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \tag{5}$$

xOy координаталар системасига нисбатан $M(x;y)$ нуқта берилса, бу нуқтанинг координаталари $\overline{OM}$ векторнинг ҳам координаталари бўла олади. $\overline{OM}$ векторни (5) формула орқали ёзсак,

$$\overline{OM}=(x;y) \tag{6}$$

Бу ҳолда $\overline{OM}$ вектор радиус-вектор деб аталади.

Агар xOy координаталар системасига нисбатан $\bar{a}(a_1;a_2)$, $\bar{b}(a_1;a_2)$ векторлари берилса, унда $a_1=b_1$ ва $a_2=b_2$ бўлгандагина $\vec{a} = \vec{b}$ бўлади, худди шундай бу икки векторнинг йиғиндиси (айирмаси) координаталари орқали қуйидагича ёзилади:

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2)$. Худди шунга ўхшаш $k \cdot \bar{a} = (kx_1; ky_2)$ бунда k - ихтиёрий сон.

Мисол. $A(-3;7)$ ва $B(1;4)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топиш талаб қилинсин.

Ечиш. $x_1= -3;\ y_1=7;\ x_2=1;\ y_2=4.$ (4), (5) формулалардан фойдаланиб; $a_1=4;\ a_2= -3$ ёки $\overline{AB}(4;-3)$ эканини топамиз.

МАШҚЛАР

1. $ABCD$ параллелограммнинг томонлари бўйича $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$ векторлар берилган.

а) $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{DC} = \vec{a}$ эканини кўрсатинг; б) $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ифодаланг.

2. $\vec{a}$ берилган. а) $3\vec{a}$; б) $-2\vec{a}$; в) $2{,}5a$ векторларни чизмада кўрсатинг.

3. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакнинг қўшни томонлари бўйича $\overline{AB} = \vec{p}$ ва $\overline{AF} = \vec{q}$ векторлари белгиланган. $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{AC}, \overline{AD}$ векторларни $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ векторлар орқали ифодаланг.

4. xOy координаталар системасида $A(2; -3)$, $B(-1;4)$ нуқталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

5. $\vec{a}(2;5)$ берилган: а) $3\vec{a}$; в) $-2{,}5\vec{a}$ векторларнинг координаталарини топинг.

6. $A(-1;-3)$; $B(4;-2)$; $C(1;-4)$; $D(-2;3)$ нуқталар берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; г) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

7. Агар $\overrightarrow{AB}(4;-5)$ векторнинг бош нуқтаси $A(1,2)$ берилган бўлса, охирги B нуқтасининг координаталарини топинг.

8. $\vec{a}(-3;4)$ вектори берилган.: а) $\vec{a}$ векторнинг узунлигини; б) $-\vec{a}$ векторнинг координаталарини топинг.

9. $\vec{a}(3;-2)$; $\vec{b}(-5;2)$ векторлар берилган. Агар а) $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ бўлса, $\vec{c}$ векторнинг координаталарини топинг.

10. 9-масалада берилганлар бўйича ҳар бир ҳолдаги $\vec{c}$ векторнинг модулини топинг.

11. Агар тўртбурчакнинг диагоналлари кесишган нуқтада тенг иккига бўлинса, унда бу тўртбурчак параллелограмм бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари бўйича белгиланган векторларни диагонал векторлар билан ифодаланг.

49-§. ЎТМАС БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

Биз юқорида тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишни кўриб чиқдик. Бу ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари билан боғлиқ бўлди.

Лекин геометрияда ўтмас бурчакли учбурчаклар катта ўрин эгаллайди. Шунинг учун ихтиёрий учбурчакнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишни аниқлаш учун ўтмас бурчакнинг ҳам тригонометрик функцияларини қўлланишга тўғри келади.

Ўша мақсадда xOy координаталар системасида $\omega(O,r)$ айланани чизиб, унинг нуқталари координаталари орқали бурчакнинг тригонометрик функцияларини ифодалашни кўриб чиқамиз.

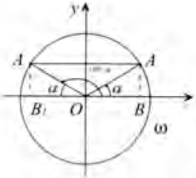
Айланада ётган ихтиёрий $A(x;y)$ нуқтани белгилаб оламиз.

Ox ўқининг мусбат йўналиш билан айлананинг ихтиёрий *A* нуқтасига ўтказилган радиусларнинг орасидаги бурчакларни қараймиз. *Ox* ўқининг мусбат йўналишидан бошлаб уни соат стрелкасининг йўналишига қарши айланишидан пайдо бўлган бурчакларни мусбат бурчак деб ҳисоблашни шартлашиб оламиз (141-расм). Унда 141- расмдаги $OA=R$, $OB=x$; $BA=y$, $\angle BOA=\alpha$ ўткир бурчак бўлсин. Биз α бурчакни x ўқининг мусбат йўналишидан бошлаб *A* нуқтага мос келувчи *OA* радиусгача соат стрелкасининг ҳаракатига қарши йўналишга мос келадиган қилиб олдик. Унда *OAB* тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$\sin\alpha=\frac{BA}{OA}=\frac{y}{R}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}, \qquad (2)$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x}. \qquad (3)$$



141-расм

Демак, α бурчакнинг тригонометрик функцияларини бурчакка мос келувчи *A* нуқтанинг координаталарига нисбатан аниқлаш мумкин. Бунда айлананинг $A(x,y)$ нуқтаси α бурчакка мос келувчи нуқта қатори кўрилади. Унда (1), (2), (3) тенгликлардан қуйидаги таърифларни айтиш мумкин:

1) α бурчакнинг синуси айланада унга мос келувчи нуқта ординатасининг радиусга нисбатига тенг;

2) α бурчакнинг косинуси айланада унга мос келувчи нуқта абсциссасининг радиусга нисбатига тенг;

3) α бурчакнинг тенгенси айланада унга мос келувчи нуқта ординатасининг абсциссага нисбатига тенг.

Бу таърифларни ўтмас бурчаклар ёки айлананинг x ўқининг юқори томонида ётган бўлаги учун қўлланиб кўрайлик. Юқори томондаги ярим айланадан $A_1(x_1;y_1)$ нуқта берилиб, OA_1 радиус x ўқи билан $180^0-\alpha$ бурчак ҳосил қилади, деб ҳисоблайлик ёки $\angle BOA_1=180^0-\alpha$ бўлсин. Унда юқоридаги уч таърифни қўллаб,

$$\sin(180^0-\alpha)=\frac{y_1}{R}, \qquad (4)$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{x_1}{R},\qquad (5)$$

$$tg(180^0 - \alpha) = \frac{y_1}{x_1}\qquad (6)$$

тенгликларни ёзиш мумкин.

Бироқ, $\Delta OA_1B_1 = \Delta OAB$ эканини ҳисобга олиб, $y_1 = B_1A_1 = BA = y$, $x_1 = OB = -OB_1 = -x$ деб ёзиш мумкин. Натижада охирги тенгликлардаги қийматларни (4), (5), (6) формулаларига қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha\qquad (7)$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha\qquad (8)$$

$$tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha\qquad (9)$$

Демак, ўтмас бурчакларнинг тригонометрик функциялари қийматларини ҳисоблаш мумкин экан. Бунинг учун ўтмас бурчакни ёйиқ бурчаккача тўлиқловчи ўткир бурчакнинг тригонометрик функцияларининг қийматларини топиш керак.

МАШҚЛАР

1. 1) $\alpha = 0^0$; 2) $\alpha = 90^0$; 3) $\alpha = 180^0$ бўлганда, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

2. Агар: $\alpha = 0^0$, 180^0 бўлса, $tg\alpha$ нинг қиймати нимага тенг; б) $\alpha = 90^0$ бўлганда нима учун қийматга эга эмас?

3. Агар α нинг қийматлари: 1) 120^0; 2) 135^0; 3) 150^0 бўлса, жадвалдан фойдаланмасдан $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

4. $\sin 157^0 = \sin 23^0$ бўлишини исбот қилинг.

5. $\cos 125^0 = -\cos 55^0$ бўлишини исбот қилинг.

6. Ҳар қандай α ўткир бурчак учун $tg157^0 = -tg\ 23^0$ бўлишини исбот қилинг.

7*. Жадвалдан фойдаланиб, а) 140^0; б) $98^0 30'$; в) 161.6^0 бурчакнинг синуси ва косинусини ҳисобланг.

8. Жадвалдан фойдаланиб: а) $tg\ 100^0$; б) $tg170^0 28'$ қийматларини ҳисобланг.

9. Агар: а) $cos\alpha = -0,8$; б) $tg\alpha = -0,5$ бўлса, жадвалдан фойдаланиб, α бурчакни топинг.

10. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ бўлса, $sin\alpha$ ва $tg\alpha$ нинг қийматини топинг.

50-§. ИККИ ВЕКТОРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

***Таъриф*. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси векторлар узунликларининг улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг**.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпаймаси $\vec{a}\cdot\vec{b}$ кўринишда белгиланади.

Унда таъриф асосида:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi \qquad (1)$$

Бунда φ бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак ёки

$$\varphi = (\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

1) Икки векторнинг скаляр кўпаймаси ўрин алмаштириш хоссасига эга бўлади, ёки $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Бу хоссанинг ва бундан кейинги хоссаларнинг тўғрилигини юқоридаги таъриф асосида исбот қилиш мумкин.

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (скаляр кўпайтманинг тақсимот қонуни).

3) $(\vec{k}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{k}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{k}\cdot\vec{b})$, бунда *k*- ҳақиқий сон.

4) Агар $\vec{b}=\vec{a}$ бўлса, унда $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ бўлади. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ ифодаси $\vec{a}$–векторнинг скаляр квадрати деб аталади. $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0=|\vec{a}|^2$; $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ бунда

$\varphi=(\widehat{\vec{a}_1;\vec{a}_2})=0^0$, демак, векторнинг скаляр квадрати шу вектор узунлиги квадратига тенг.

5) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлари нол-вектор бўлмаса ва бир-бирига

перпендикуляр бўлса, унда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

$\vec{a}\cdot\bar{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$, бунда $\varphi=(\vec{a},\vec{b})\cdot a$ ва $\bar{b}$ векторлар

перпендикуляр, ёки $\varphi=90^0$ бўлса, унда $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad (2)$$

Бу тенгликни икки векторнинг перпендикулярлик шарти деб атаймиз.

Натижа. $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$ бўлади.

Сабаби $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ векторлари координата ўқлари бўйлаб йўналган, бир-бирига перпендикуляр бўлган бирлик векторлар.

Юқоридаги хоссалардан фойдаланиб, координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз. $a(a_1;a_2)$, $b(b_1;b_2)$ векторларни олайлик. Уларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2)\cdot(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2)=a_1\cdot b_1\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+$$

$$+b_1\cdot a_2\cdot\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a_1\cdot b_1\cdot\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+a_2\cdot b_2\cdot\vec{e}_2\vec{e}_2=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$$

бўлади.

Чунки юқоридаги хоссалар ва натижа асосида:

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0;\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1^{\,2}=1;\ \cdot|\vec{e}_1|^2=1^2=1;$$

$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=1$$

Демак, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2b_2$ (3)

(3) координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмасини ифодалайди.

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси математика курсида бир қанча теоремаларнинг исботи ва масалалар ечилишини енгиллатади.

Масалан: $\bar{a}(5;12)$ ва $\bar{b}(-4;2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. Векторлар координаталар билан берилган. Шунинг учун (3) формуладан фойдаланамиз. Бунда $a_1=5;\ a_2=12;\ b_1=-4;$ $b_2=2$, унда $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ бўлади.

(3) формуладан:

$$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2,$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2} \qquad (4)$$

Бу формула орқали векторнинг узунлиги аниқланади.

(1), (3), (4) формулалардан икки вектор орасидаги бурчак косинусини топиш мумкин:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \qquad (5)$$

МАШҚЛАР

1. $\left|\vec{a}\right|=6, \left|\vec{b}\right|=4, (\vec{a},\vec{b})=60^0$ бўлса, унда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

2. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси томонлари квадратлари йиғиндисига тенг эканлигини исботланг.

Кўрсатма. Параллелограммнинг қўшни томонларини $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан белгилаб, диагоналларнинг квадратини ҳисоблаш керак.

3. $\vec{a}(-3;4)$ ва $\vec{b}(2;4)$ векторлар берилган. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга туширилган проекциясини топинг.

4. Учбурчакнинг учлари *A(2;1); B(-6;7); C(2;-2)* бўлса, А бурчак косинусини топинг.

Кўрсатма. $\overline{AB}, \overline{AC}$ векторларни топинг.

5. Тўғри бурчакли учбурчак учун Пифагор теоремасини исбот қилинг.

Кўрсатма: катетлари бўйича белгиланган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни $\vec{c}$ вектор орқали ифодалаб, $\vec{c}\cdot\vec{c}=\overline{c^2}=c^2$ кўпайтмани ҳисобланг. a,b - катетлар, c - гипотенуза.

6. Диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган параллелограмм ромб бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Параллелограммнинг диагонал векторларини қўшни томонлари бўйича белгиланган векторлар орқали ифодалаб, икки векторнинг перпендикулярлик шартидан фойдаланинг.

7. Агар параллелограммнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва тенг бўлса, унда бу параллелограмм квадрат бўлишини исбот қилинг.
8. Агар учбурчакнинг медианаси қаршисидаги томонга перпендикуляр бўлса, унда бу учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.
9. Агар учбурчакнинг икки медианаси тенг бўлса, унда берилган учбурчак тенг ёнли эканлигини исботланг.
10. Учбурчакнинг учлари $A(1;4)$; $B(6;\ -1)$; $C(4;-3)$ нуқталарда ётади. ABC учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини икки йўл билан ифодаланг: а) Пифагор теоремасига тескари теорема асосида; б) томонларининг бир-бирига перпендикулярлик шарти асосида.
11. Тўртбурчакнинг учлари $A(-3;-2)$, $B(2;1)$, $C(-1;6)$, $D(-6;3)$ нуқталарда ётади. $ABCD$ тўртбурчакнинг квадрат эканлигини икки усул билан исбот қилинг: а) диагоналлари узунликларининг тенглиги ва перпендикулярлигини текшириш орқали; б) тўртбурчакнинг томонлари билан устма-уст тушувчи векторлар координаталарини ҳисоблаш орқали.

51-§. КОСИНУСЛАР ВА СИНУСЛАР ТЕОРЕМАЛАРИ

61-теорема. (косинуслар теоремаси). **Ихтиёрий учбурчак бир томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу томонлар билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмаси иккиланганининг айирмасига тенг.**

Исбот. ΔABC берилсин (172-расм). A,B,C учларидаги бурчаклари мос ҳолда α, β, γ орқали, учлари қаршисидаги томонларини мос ҳолда a,b,c орқали белгилайлик. Унда учбурчакнинг a томонига нисбатан $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ бўлишини исбот қиламиз.

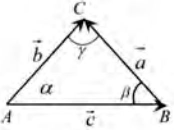
Ҳар қандай кесмага йўналиш бериб, вектор кўринишида тасвирлаш мумкин. Берилган учбурчакнинг томонларини 142-расмда кўрсатилгандек векторлар орқали ифодалаймиз. Унда $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$ бўлиши тушунарли.

Энди $\vec{a}$ векторнинг скаляр квадратини ҳисоблаймиз (50 -§).

$\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{b}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{b}^{\,2} - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^{\,2}$,

бунда $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2;\ \vec{b}^2 = b^2;\ \vec{c}^2 = c^2$,

$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha$ бўлади. Натижада



142-расм

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (1)$$

бўлади. Шунга ўхшаш

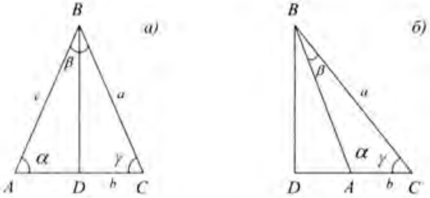
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (3)$$

бўлишини ҳам исбот қилиш мумкин. Теорема исбот қилинди.

***62-теорема (синуслар теоремаси).* Ҳар қандай учбурчак томонлари шу томонлар қаршисида ётган бурчак синусларига пропорционал бўлади**.

Исбот. ΔABC берилсин (143-расм). Томонлари ва бурчаклари юқоридагидек белгиланган. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (4) бўлишини исбот қиламиз.



143-расм

AC томонига BD баландликни туширамиз. Унда тўғри бурчакли иккита учбурчак ҳосил бўлади: ΔABC ва ΔBDC. α ва β бурчакларига нисбатан қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз.

α – ўткир бурчак бўлсин. 1) α - ўткир бурчак бўлганда (143а-расм), $BD = c \cdot \sin\alpha$ (ΔABD да),

$BD = \alpha \sin\gamma$ (ΔBDC да)

ёки $c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$ (x)

2) α - ўтмас бурчак бўлганда (143^{6}-расм)да ΔABD га нисбатан $BD = c\sin(180^0 - \alpha) = c\sin\alpha$ бўлади ва ΔBDC га нисбатан $BD = a \cdot \sin\gamma$ бўлади. Бу ҳолда ҳам

$c \cdot \sin\alpha = \alpha \cdot \sin\gamma$ (y)

(x) ва (y) тенгликларидан $a : \sin\alpha = c : \sin\gamma$ бўлади. Худди шундай йўл билан $a : \sin\alpha = b : \sin\beta$ бўлишини исботлаш мумкин. Демак,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (4)$$

оламиз. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. Агар ABC учбурчакда $\beta = 60^0$ бўлса, b томонининг квадратига нисбатан косинуслар теоремаси қандай ёзилади?

2. ABC учбурчакда α бурчакнинг қандай қийматларида: 1) $a^2<b^2+c^2$; 2) $a^2=b^2+c^2$; 3) $a^2>b^2+c^2$ тенгсизликлари тўғри бўлади?

3. Агар: 1) $a=9$; $b=11$, $\gamma=70^0$; 2) $a=3$; $c=5$; $\beta=130^018'$; 3) $b=1,4$; $c=2,5$; $\alpha=35^034'$ бўлса, ΔABC нинг номаълум томонини топинг.

4. Агар ABC учбурчакда $a=40$, $b=13$, $c=37$ бўлса, унинг катта бурчагини топинг.

5. Параллелограммнинг m ва n диагоналлари, улар орасидаги β бурчаги берилган. Параллелограммнинг томонларини топинг.

6. Параллелограммнинг a ва b томонлари, бурчакларидан бири α берилган. Параллелограмм диагоналларини топинг.

7. Учбурчакнинг томонлари 6м, 8м ва 10 м бўлса, кичик бурчакнинг косинусини топинг.

8. ABC учбурчакда $b=12$ см, $\gamma=30^0$; $\beta=45^0$ бўлса, унинг c томонини топинг.

9. ABC учбурчакда: 1) $a=6$ см; $b=3$ см; $\alpha=150^0$ бўлса, β бурчакни; 2) $a=3,7$ см, $c=5,9$ см, $\gamma=23^020'$ бўлса α бурчакни топинг.

10. Агар: $b=110$ см; $\alpha=45^0$; $\gamma=102^030'$ бўлса, a томонини;

2) c=18 см; $\alpha=130^0$; $\beta=27^016'$ бўлса, b томонини топинг.

11. $ABCD$ параллелограммда AB=8см, AD=10 см, $\angle BAD=50^0$ бўлса, унинг диагоналларини топинг.

12. Ромбнинг томони 46 дм, бурчаги 62^0 бўлса, унинг диагоналларини топинг.

13. Параллелограммнинг диагонали 12 см га тенг бўлиб, унинг томонлари билан 18^0 ва 62^0 бурчакларни ташкил қилади. Параллелограммнинг томонларини топинг.

14. Трапециянинг асослари 12,6 дм ва 16,4 дм, ён томонлари 6 дм ва 8 дм бўлса, трапециянинг бурчакларини топинг.

52-§. УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

Учбурчакнинг асосий элементлари бўлиб уч томони ва учала бурчаги ҳисобланиши маълум. Агар бу олти элементдан учтаси берилса (учта бурчагидан ташқари), унда учбурчакнинг қолган элементларини топиш мумкин. Бу масалалар учбурчакни ечиш деб аталади. Бунда геометриянинг маълум теоремалари, тушунчалари, косинуслар ва синуслар теоремалари қўлланилади.

Учбурчакни ечишни тўрт турдаги масалаларга бўлиш мумкин.

1. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган. Қисқача: b, c ва α берилган, a, β, γ ни топиш керак.

$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\alpha$ тенглигидан a ни, $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$ тенглигидан β ни, $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$дан γ ни топамиз. Натижада масала тўлиқ ечилган бўлади.

2. берилган. b, c, α ни топиш керак. Аввал $\alpha=180^0-(\beta+\gamma)$ бурчакни топамиз. Ундан кейин синуслар теоремасини қўллаииб, учбурчакнинг томонларини (b ва c ни) топамиз.

3. a, b, c берилган: α,β,γ бурчакларни топиш керак. Бу бурчаклардан бирини, масалан, α ни косинуслар теоремасидан фойдаланиб топамиз. Иккинчи (β) бурчакни топиш учун синуслар ёки косинуслар теоремасидан фойдаланамиз. Учинчи бурчак $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$ тенглигидан аниқланади.

4. a, b ва α (ёки β) берилган, c томонини, β(ёки α), γ бурчакларни топиш керак.

Аввал синуслар теоремасидан фойдаланиб β бурчакни топамиз. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ бўлади. Синуслар теоремасидан cни топамиз.

5. Учбурчакнинг ихтиёрий бурчагининг биссектрисаси шу бурчак қаршисида ётган томонини қўшни томонларига пропорционал бўлакларга бўлади, яъни 143^6 –расмдаги BAни биссектриса деб ҳисобласак, унда $BD:BC=DA:AC$ бўлишини синуслар теоремаси асосида исбот қилинг.

МАШҚЛАР

1. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича учинчи томонини ва қолган икки бурчагини топинг.

1) $a=8$; $b=15$; $\gamma=120^0$;

2) $b=10{,}8$; $c=16$; $\alpha=76^040'$;

3) $a=150$, $c=181{,}5$; $\beta=80{,}5^0$

4) $a=4{,}5$; $b=7{,}6$; $\gamma=140^012'$.

2. Учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги берилган. Қолган томонлари ва учинчи бурчагини топинг.

1) $b=30$; $\alpha=50^0$; $\gamma=45^0$;

2) $a=14{,}8$; $\beta=110^0$; $\gamma=30^046'$;

3) $c=5{,}6$; $\alpha=29^0$; $\beta=110^0$

4) $b=1{,}8$; $\alpha=16^07'$; $\gamma=61^07'$.

3. Учбурчакнинг уч томони берилган. Учала бурчагини топинг.

1) $a=4$; $b=6$; $c=7{,}5$;

2) $a=101$; $b=98{,}7$; $c=15$;

3) $a=0{,}6$; $b=1{,}4$; $c=1{,}2$;

4) $a=12{,}4$; $b=8$; $c=12{,}4$.

4. Учбурчакнинг икки томони ва уларнинг бири қаршисидаги бурчаги берилган. Учинчи томони ва қолган икки бурчагини ҳисобланг.

1) $b=8$; $c=10$; $\beta=45^0$;

2) $b=4{,}9$; $c=6{,}5$; $\gamma=101^07'$;

3) $a=100$; $b=80$; $\alpha=120^0$;

4) $a=11{,}5$; $b=25{,}6$; $\beta=80^017'$;

5) $a=12$; $c=16$; $\alpha=11^0$;

6) $a=1,3$; $b=2,4$; $\gamma=7,5^0$.

5. ABC учбурчакда $\alpha=70^0$; $\beta=50^0$; $\gamma=60^0$. Бу учбурчакнинг энг катта томони ва энг кичик томонини аниқланг.

6. ABC учбурчакда $a=10,2$дм; $b=17$дм ва $c=8,5$ дм. Унинг қайси бурчаги энг катта ва қайси бурчаги энг кичик?

53-§. КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИНИНГ ВА ВЕКТОРЛАРНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Биз юқорида текисликдаги координаталар системасига нисбатан чизиқларнинг тенгламаларини тузишни кўриб чиқдик. Демак, геометрия билан алгебранинг боғлиқлигини кўрсатдик. Алгебрик тилда ифодаланган геометрия аналитик геометрия деб аталади. Унинг асосий ғояси бўлиб координаталар методи ҳисобланади. Аналитик геометрияда координаталар системасидан фойдаланиб фигураларнинг ҳолати, хоссалари ўрганилади. Координаталар методи эса, берилган координаталар системасига нисбатан тартиб билан берилган сонлар ёрдамида нуқталарнинг ҳолатини аниқлашдан иборат. Бу методга асосан ҳар қандай фигура нуқталар тўпламидан иборат.

Координатлар методи ва вектор ҳақидаги маълумотлардан фойдаланиш геометриядаги айрим теорема исботларини ва масалалар ечишни бироз енгиллатади. Уларни фойдаланишда координаталар системасини ва векторларни қаралаётган масалага мос қилиб танлаб олиш зарур.

63-теорема. **Параллелограмм томонларининг узунликлари квадратларининг йиғиндиси диагоналлари узунликларининг квадратлари йиғиндисига тенг.**

Исбот. Координаталар боши параллелограммнинг бир учида, абсцисса ўқи унинг бир томони билан устма-уст тушадиган қилиб координаталар системасини танлаб оламиз (144-расм). $OA=a$ деб белгиласак, унда $A(a,o)$ бўлади. C учининг координаталари b ва c бўлсин: $C(b,c)$. Унда B учининг координаталари $a+b$ ва c бўлади: $B(a+b, c)$.

$OABC$ параллелограммнинг томонлари ва диагоналлари узунликларининг квадратларини ҳисоблаймиз, теорема шартини қаноатлантиришини текширамиз. Томонлари узунликларининг квадратларини ҳисоблаймиз.

$$OA^2=a^2;\ AB^2=(a+b-a)^2+(c-o)^2=b^2+c^2;\ BC^2=a^2;$$

$OC^2=b^2+c^2$; унда

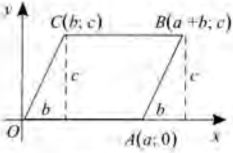
$$OA^2+AB^2+BC^2+OC^2=2a^2+2b^2+2c^2 \qquad (1)$$
бўлади.

Энди диагоналларининг узунликлари квадратларини ҳисоблаймиз.

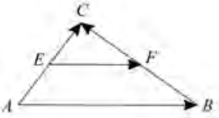
$OB^2=a^2+2ab+b^2+c^2$,

$AC^2=b^2-2ab+a^2+c^2$

Унда $OB^2+AC^2=2a^2+2b^2+2c^2$ (2)



144-расм



145-расм

бўлади. (1) ва (2)ни таққослаб, OA^2+AB^2+BC+ $+OC^2=OB^2+AC^2$ га эга бўламиз. Теорема исбот қилинди.

***64-теорема*. Учбурчакнинг ўрта чизиғи асосига параллел ва унинг ярмига тенг.**

Исбот. Бу теорема аввал исбот қилинган, ҳозир векторлар ёрдамида исбот қиламиз. ΔABC берилсин (145-расм). EF – унинг ўрта чизиғи. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}$ векторларни белгилаймиз.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \qquad (3)$$

ва
$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC} \qquad (4)$$

бўлади. Бунда $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ бўлиши тушунарли.

Унда (4)дан $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ бўлади. Энди (3) тенгликни фойдалансак, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ бўлади. Векторни сонга кўпайтириш асосида $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{EF}$ *ва* $\overrightarrow{AB}$ векторлари бир хил йўналганлиги учун $EF = \frac{1}{2}AB$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

1-масала. Координаталар методидан фойдаланиб, тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ўртасида ётган нуқта учбурчак учларидан бир хил узоқликда бўлишини исбот қилинг.

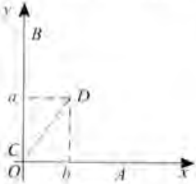
Ечиш ABC тўғри бурчакли учбурчак берилсин (146-расм). Катетлари a,b бўлсин. C тўғри бурчакнинг учи координата боши билан, катетлари x,y ўқлари билан устма-уст тушсин. D нуқта AB гипотенуза ўртасида ётсин $A(b,o)$, $B(o,a)$ бўлади. 44 – §нинг асосида $D\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2}\right)$ бўлади.

Энди икки нуқта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласидан $AD=DB=OD$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

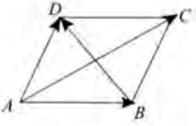
2 масала. Векторлар ёрдамида ромб диагоналлари перпендикуляр бўлишини исбот қилинг.

Ечиш. $ABCD$ ромб бўлсин (147-расм). $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ векторларни белгилаймиз. Бунда AC, BD диагоналларининг перпендикуляр эканлигини кўрсатиш учун $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ (уларнинг скаляр кўпайтмаси нол) бўлишини исботлаш (51– §. 5-хосса) етарли бўлади.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ бўлиши тушунарли. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси хоссаларини, ромб томонлари тенглигини ҳисобга олсак,



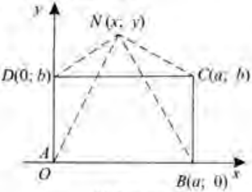
146-расм



147-расм

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD^2}-\overrightarrow{AB^2}=0$$

бўлади, ёки $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Демак, $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$, бундан $AC\perp BD=0$ бўлади. Масала ечилди.



148-расм

3-масала. *ABCD* тўғри тўртбурчак берилган. Ихтиёрий *N* нуқта учун $AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$ бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Координаталар системасининг боши берилган. Уни *ABCD* тўғри тўртбурчакнинг бир учи билан, координата ўқлари унинг томонлари билан устма-уст тушадиган қилиб танлаб оламиз (148-расм). *A* учи координата боши *O* нуқта билан устма-уст тушсин. Унда *A(o;o)* бўлади. *Ox* ўқи *AB* томон билан устма-уст тушсин. *AB=a* деб ҳисоблайлик. Унда *B* учининг координаталари *B(a;o)* бўлади.

AD томони *Ox* ўқида ётсин. *AD=b* деб белгилайлик. *D* учи *Ox* ўқида ётганлиги учун унинг координаталари *D(o;b)* бўлади. *C* учининг координаталари эса осон топилади: *C(a;b)*.

Текисликда иҳтиёрий *N* нуқтани шу координаталар системасига нисбатан *N(x,y)* деб ёза оламиз. Энди масала шартидаги оралиқлар квадратларини ҳисоблаб, таққослаймиз:

$AN^2=x^2+y^2$; $NC^2=(x-a)^2-(y-b)^2$; $NB^2=(x-a)^2+y^2$,
$DN^2=x^2+(y-b)^2$.

Бу қийматларни таққослаб $AN^2+CN^2=BN^2+DN^2$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

МАШҚЛАР

1. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 8 дм, унинг асосига туширилган медианаси эса 16 дм. Учбурчакнинг қолган медианаларини топинг.
2. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати унинг катетлари квадратлари йиғиндисига тенг (Пифагор теоремаси) бўлишини исбот қилинг.
3. Агар параллелограмм диагоналлари тенг бўлса, унда бу параллелограмм тўғри тўртбурчак бўлишини исбот қилинг.
4. Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг

иккига бўлинишини исботланг.

5. Учбурчак берилган. Унга ташқи чизилган айлана марказини топинг.
6. Учбурчак томонлари a,b,c берилган, b томонига ўтказилган медиананинг узунлигини топинг.

   Кўрсатма. 63-теоремадан фойдаланинг.
7. ABC учбурчакнинг B бурчаги биссектрисаси *ВД*. Агар: 1) $AB=10$ м, $BC=15$ м, $AC=20$ м бўлса, AD ва DC кесмаларни; 2) $AD:DC=8:5$ ва $AB=16$ м бўлса, BC томонини; 3) $AB:BC=2:7$ ва $DC-AD=1м$ бўлса, AC томонини топинг.

   Кўрсатма. ABD *ва* CBD учбурчакларига синуслар теоремасини қўллаб, $AD:CD=AB:BC$ деб олинг.
8. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 20 см, унинг асосининг ён томонига нисбати 4:3 га тенг. Шу учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.
9. Трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани векторлардан фойдаланиб исбот қилинг.
10. Трапеция диагоналлари ўрталарини туташтирувчи кесма унинг асослари айирмасининг ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.
11. Учбурчакнинг учлари $A(1;1)$, $B(4;1)$; $C(4;5)$. Бу учбурчакнинг бурчаклари косинусларини топинг.
12. Векторлар ёрдамида квадрат диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исбот қилинг.

IX БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Текисликда нуқталарнинг координаталарини тушунтириб беринг.
2. Координаталари берилган нуқта xOy системасида қандай ясалади?
3. Координаталари берилган икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
4. Маркази $C(a,b)$ нуқтада, радиуси Rга тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг.
5. Маркази координаталар боши $O(o;o)$ нуқтада ётган айлана тенгламасини ёзинг.
6. Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.
7. x ва y ўқларига параллел тўғри чизиқларнинг тенгламалари қандай бўлади?
8. Қандай векторлар: а) тенг; в) параллел; в) перпендикуляр бўлади?
9. Векторларнинг йиғиндиси қандай хоссаларга эга?
10. Икки векторнинг айирмаси қандай топилади?

11. Векторни сонга кўпайтиришнинг қандай хоссалари бор?

12. Ўтмас бурчакнинг тригонометрик функциялари қандай аниқланади?

13. Икки векторнинг скаляр кўпайтмасига таъриф беринг.

14. Векторнинг координаталари қандай топилади?

15. Координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси қандай топилади?

16. Икки векторнинг скаляр кўпайтмасининг қандай хоссаларини биласиз?

17. Векторнинг узунлиги қандай топилади?

18. Косинуслар теоремасини айтиб беринг.

19. Синуслар теоремасини айтиб беринг.

IX БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Диагоналлари 8см ва 12 см бўлган ромб берилган. Ромбнинг диагоналлари координата ўқларида ётганини билган ҳолда унинг: а) учлари координаталарини топинг; б) томони узунлигини топинг.

2. Томонлари 4см ва 3см бўлган тўғри тўртбурчак берилган. Унинг бир учи координата боши билан устма-уст тушиб, томонлари координата ўқларида ётса: 1) учлари координаталарини (тўғри тўртбурчак I чоракда ётса); 2) диагоналларининг узунлигини топинг. Қандай ҳоллар бўлиши мумкин?

3. Узунлиги 6дм бўлган AB кесманинг $A(3;-2)$ учи берилган. $B(-3;y)$ учининг ординатасини топинг.

4. $x=-2;\ y=3$ тўғри чизиқларни чизинг. Улар қандай нуқтада кесишади?

5. $x^2+y^2=16$ айлана ва $y=x$ тўғри чизиқ берилган. xOy системада: а) уларни ясанг; б) уларнинг кесишган нуқталарини топинг.

6. $\overline{3a}$ ва $-\overline{3a}$ векторлар берилган: а) улар қандай векторлар? б) узунликлари қандай? в) уларнинг йиғиндиси нимага тенг? г) уларнинг айирмасини топинг.

7. Агар $\vec{a}(-2;5)$; $\vec{b}(1;-2)$ бўлса, а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}$; в) $\overline{m}=2a+3b$ векторларни топинг.

8. Агар α бурчак 1) 120^0; 2) 135^0; 3) 150^0 бўлса, жадвалдан фойдаланмай $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; ва $tg\alpha$ ларнинг қийматларини топинг.

9. М.Стюартнинг[1] теоремасини исботланг: ABC учбурчак берилиб, D нуқта BC томонда B ва C нуқталари орасида ётса унда $AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2 \quad BC=BC\cdot CD\cdot BD$

---

[1] М.Стюарт (1717-1785), англиялик математик, юқоридаги теоремани 1746 йили эълон қилган.

тенглик тўғри бўлади.

Кўрсатма. Координаталар бошини учбурчакнинг учи билан, Ox ўқининг учини BC томони билан устма-уст тушадиган қилиб, координаталар системасини танлаб олинг. Унга нисбатан A, D, C нуқталарни белгилаб, изланаётган тенгликдаги оралиқларни ҳисоблаш керак.

10*. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c берилган бўлса, у ҳолда Стюарт теоремасидан фойдаланиб, A учидан туширилган медиана, баландлик ва биссектриса узунликларини топиш формулаларини чиқаринг.

Кўрсатма. Изланаётган медиана, баландлик, биссектрисани ҳисоблашда теоремадаги AD кесмани мос ҳолда медиана, баландлик, биссектриса сифатида қараш керак.

11. ABC учбурчак $\omega(O; R)$ айланага ички чизилган.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ бўлишини исботланг.

12. Учбурчакнинг томонлари a, b, c берилган. Унинг баландликларини топинг.

13. Учбурчакнинг томонлари a, b, c берилган. Шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

14. Векторларнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланиб, тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлишини исбот қилинг.

15. Агар M нуқта AB кесманинг ўртасида ётса, текисликнинг ихтиёрий K нуқтаси учун $KA^2 + KB^2 = 2KM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ тенглик тўғри бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. $\overrightarrow{KA}; \overrightarrow{KB}; \overrightarrow{KM}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторларни белгилаб, $\overrightarrow{KB}^2$ ва $\overrightarrow{KB}^2$ ларни ҳисобланг. Тенгликни исботлашнинг яна қандай йўли бор?

X БОБ. ГЕОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР. ФИГУРАЛАРНИНГ ЎХШАШЛИГИ

54-§. ҲАРАКАТ

Таъриф. **Агар F фигуранинг ҳар бир нуқтаси қандайдир бир қонун (амал) ёрдами билан F' фигурасининг фақат биттадан нуқтасига мос келса, унда бу қонунни F фигурасини F' фигурасига геометрик алмаштириш деб атаймиз.**

Геометрик алмаштиришнинг бир тури бўлиб ҳаракат ҳисобланади. Нуқталар орасидаги масофани ўзгартирмасдан бажарилган геометрик алмаштириш **ҳаракат** деб аталади. Демак, текисликдаги ҳаракатда A ва B нуқта мос ҳолда A' *ва* B' нуқтага тўғри келса, унда $AB=A'B'$ бўлади.

Ҳаракатнинг таърифи асосида ҳаракат ҳақидаги тушунча фигураларнинг тенглиги ҳақидаги тушунчага боғлиқ эканлигини сезиш мумкин. Чиндан ҳам фигураларнинг тенглигини қуйидагича аниқлаш мумкин: текисликдаги F ва F' фигураларининг нуқталари орасидаги ўзаро бир қийматли мослик тузилиб, Fдан олинган ҳар бир AB кесма F'даги унга мос келувчи $A'B'$ кесмага тенг бўлса, унда F ва F' фигуралар тенг бўлади. Демак, F' фигура F фигурадан ҳаракат орқали олинса, унда таъриф асосида улар тенг бўлади, ёки F ва F' фигуралари тенг бўлса, унда уларнинг бирини ҳаракат орқали иккинчисига устма-уст қўйиш мумкин.

Шундай қилиб, ҳаракатда фигуранинг шакли, ўлчамлари ўзгармайди, уларнинг жойлашган ўрнигина ўзгаради.

Ҳаракатнинг турлари бўлиб ўққа нисбатан симметрия, марказий симметрия, нуқта атрофида буриш ва параллел кўчириш ҳисобланади. Қуйида шу алмаштиришларга тўхталиб ўтамиз.

54.1. ЎҚҚА ВА НУҚТАГА НИСБАТАН СИММЕТРИЯЛАР

Таъриф. **MM' кесма ℓ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб, шу тўғри чизиқ орқали тенг иккига бўлинса, унда M ва M' нуқталари ℓ тўғри чизиққа нисбатан**

симметрик деб аталади (149-расм).

Бунда ℓ тўғри чизиқ M ва M' нуқталари учун симметрия ўқи бўлиб ҳисобланади. Таъриф асосида $M'M_0=M_0M$ бўлади. ℓ ўқида ётган ҳар бир нуқта ўзи ўзига симметрик бўлиши тушунарли. Бу тўғридан-тўғри таърифдан келиб чиқади. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасини қандайдир ℓ ўқига нисбатан симметрик қилиб M' нуқтага алмаштириш ўққа нисбатан симметрия деб аталади.

149-расм

Ўққа нисбатан симметрия ўзаро бир қийматли алмаштириш бўлади. Чунки текисликнинг ҳар бир M нуқтасини, таърифнинг ҳар бир талаби бажариладиган қилиб, фақат битта M' нуқтага симметрик алмаштириш мумкин.

Худди шундай текисликнинг ҳар бир M' нуқтасини ℓ ўқига нисбатан симметрик қилиб алмаштирсак, қайтадан фақат битта M нуқтага эга бўламиз.

Текисликда қандайдир бир ℓ ўққа нисбатан F фигуранинг ҳар бир M нуқтасига симметрик бўлган M' нуқта топилса, унда бундай M' нуқталарнинг тўплами F' фигурани ифодалайди. Бу ҳолда F ва F' фигуралар ℓ ўқига нисбатан симметрик деб аталади.

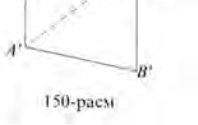
Ўққа нисбатан симметриянинг қуйидаги хоссалари бор:

1. Ўққа нисбатан симметрияда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармайди. ℓ ўқи ва унда ётмаган A ва B нуқта берилган бўлсин (150-расм). ℓ ўқига нисбатан симметрияда A ва B нуқталари мос ҳолда A' ва B нуқталарига ўтсин. Бунда $AB=AB'$ бўлишини исбот қиламиз.

$\Delta AA_0B_0 = \Delta A'A_0B_0$ бўлганлиги сабабли, $AB_0=A'B_0$, $\angle 1 = \angle 2$ бўлади. Бундан $\angle 3 = \angle 4$ келиб чиқади. Натижада $\Delta AB_0B = \Delta A'B_0B'$ тенгликка эга бўламиз. Шундай қилиб, $AB=A'B'$ бўлади.

2. Ўққа нисбатан симметрия - бу ҳаракат. Бунинг тўғрилиги ҳаракатнинг таърифидан ва 1-хоссадан келиб чиқади.

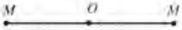
3. Ўққа нисбатан симметрик фигуралар тенг бўлади. Бу хосса фигуралар тенглигининг таърифи ва 1-хосса асосида исбот қилинади.



150-расм

Натижа. Ўққа нисбатан симметрияда тўғри чизиқ тўғри чизиққа, нур нурга ўтади (мос

келади). Бу хоссанинг тўғрилиги 3-хоссадан келиб чиқади.



151-расм

Таъриф. Агар MM' кесма O нуқтада тенг иккига бўлинса, унда M ва M' нуқталар O нуқтага нисбатан симметрик деб аталади (151-расм).

Бунда O нуқта симметрик бўлган M ва M' нуқталар учун симметрия маркази бўлади. Таъриф асосида $MO=OM'$. O нуқта ўзи ўзига симметрик (ёки ўз-ўзига тўғри келади) деб ҳисобланади.

Текисликнинг ҳар бир M нуқтасини O марказга нисбатан симметрик қилиб M' нуқтага алмаштириш **марказий симметрия** деб аталади.

Марказий симметрия - бу ўзаро бир қийматли алмаштириш ҳисобланади. Чунки таърифнинг талаби бажариладиган қилиб, текисликнинг ҳар бир M нуқтасига марказий симметрик бўлган фақат битта M' нуқтани топиш мумкин. Аксинча, M' нуқтани O марказга нисбатан симметрик қилиб алмаштирсак, қайтадан яна фақат M нуқтага эга бўламиз.

Агар текисликда қандайдир F фигуранинг ҳар бир M нуқтасини O марказга нисбатан симметрик алмаштирсак, M' нуқтага эга бўламиз. Бу M' нуқталарнинг тўплами F' фигурани ифодалайди. Бу ҳолда F ва F' фигуралар O марказга нисбатан симметрик бўлади.

Марказий симметрия қуйидаги хоссаларга эга.

1. Марказий симметрияда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармайди.

O симметрия маркази, A,B нуқталар берилсин. O марказга нисбатан симметрияда бу нуқталар A',B' нуқталарга ўтади (чизмани мустақил чизинг). Таъриф асосида $OA=OA'$; $BO=OB'$; $\angle AOB=\angle A'OB'$ (вертикал бурчаклар). Демак, AOB ва $A'OB'$ учбурчаклар тенг бўлади. Бундан $AB=A'B'$ бўлади.

2. Марказий симметрия - бу ҳаракатдир.

3. Марказий симметрик фигуралар ўзаро тенг бўлади.

Бу охирги хоссанинг тўғрилиги 1-хоссанинг ва марказий симметриянинг юқоридаги таърифларидан келиб чиқади.

МАШҚЛАР

1. A,B нуқталар, CD кесма берилган. Уларга:
   а) ℓ ўқига нисбатан; б) O марказга нисбатан симметрик фигураларни ясанг.
2. Кесма берилган. Унинг симметрия ўқи ва симметрия марказини топинг.
3. Квадрат берилган. Унинг қанча симметрия ўқи бор, қанча симметрия маркази бор? Улар қаерда бўлади?

4. Ромб диагоналларини ўз ичига олган тўғри чизиқлар унинг симметрия ўқлари бўлишини исботланг.

5. Тенг ёнли трапеция асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи бўлишини исботланг.

6. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчагининг бири 30^0га тенг бўлса, кичик катети гипотенуза ярмига тенг бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. Катта катетига нисбатан берилган учбурчакка симметрик учбурчак ясанг.

7. $A(-2;3)$ ва $B(2;-1)$ нуқталарининг симметрия ўқини топинг.

8. xOy координаталар системасининг Ox ўқига нисбатан учлари $A(1;3)$, $B(-1;2)$; $C(-3;5)$ бўлган ABC учбурчакка симметрик учбурчакни топинг. Уларнинг периметрларини таққосланг.

9. Ромбнинг (квадратнинг) учта учи берилган. Тўртинчи учини топинг.

10. Тўғри чизиқ айланага уриниб ўтади. Бу тўғри чизиққа нисбатан берилган айланага симметрик айланани ясанг.

11. Бир томони, унга ёпишган бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси бўйича учбурчакни ясанг.

Кўрсатма. Анализда берилган томонининг қаршисида ётган бурчакнинг биссектрисасига нисбатан учбурчакнинг бир томонини иккинчи томонига симметрик алмаштиринг.

12. Берилган диагонали берилган a тўғри чизиқда ётган, икки учи b ва c тўғри чизиқларда ётган (ёки берилган икки айланада) ромбни ясанг.

Кўрсатма. b ёки c тўғри чизиқни (ёки айланалардан бирини) a тўғри чизиққа нисбатан симметрик ўтказинг.

13. Томони, унинг қаршисида ётган бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

Кўрсатма. 11-масаланинг ечимидан фойдаланинг.

14*. Икки томони ва шу томонлари қаршисида ётган бурчакларининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

Кўрсатма. Изланувчи учбурчак ABC бўлсин, a,b томонлари, $\angle B-\angle A=\alpha$ бурчак бўлсин. Берилганлар бўйича $AC'C$ учбурчакни ясаймиз. C' ва C нуқталарнинг симметрия ўқи ℓ бўлсин. $AC'C$ учбурчакнинг ℓ ўқига нисбатан симметрик ўзгартирсак, изланаётган учбурчакка эга бўламиз.

15. a тўғри чизиқ AB кесмани кесиб ўтади. ABM бурчаги a тўғри чизиқ орқали тенг иккига бўлинадиган қилиб a тўғри чизиқда ётган M нуқтани топинг.

Кўрсатма. a тўғри чизиққа нисбатан B нуқтага (ёки A нуқтага) симметрик B' (ёки A') нуқтани топинг. Унда a тўғри чизиқ билан AB' тўғри чизиқнинг кесилиш нуқтаси изланаётган M нуқта бўлади.

16. а) Тўғри чизиқнинг қанча симметрия маркази бор?

б) Параллел икки тўғри чизиқнинг нечта симметрия маркази бор?

17. Марказга нисбатан симметрик кесмаларнинг тенг эканлигини исбот қилинг.

18. Қуйидагиларни исбот қилинг: а) тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлади; б) шу тўртбурчак диагоналларининг ўрталари ва қарама-қарши икки томонининг ўрталари ҳам параллелограммнинг учлари бўлади; в) олинган учта параллелограмм умумий марказга эга.

19. Параллелограмм бурчакларининг биссектрисалари кесишганда тўғри тўртбурчак ҳосил бўлишини исбот қилинг.

20. Марказий симметрияда берилган айлана ўзига тенг айланага алмашинишини исботланг.

Кўрсатма. Берилган айлана марказининг ва ихтиёрий нуқтасининг марказий симметриясини топинг.

21. Чекланган ясси фигура биттадан ортиқ симметрия марказига эга бўлмайди. Исбот қилинг.

Кўрсатма. Берилган фигура O_1 ва O_2 симметрия марказларига эга бўлсин. O_1 ва O_2 нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Агар O_1O_2 тўғри чизиқ шу фигурани кесиб ўтса, унда O_1 ва O_2 нуқта фақат битта кесманинг ўртаси бўлар эди, агар O_1O_2 тўғри чизиқ фигурани кесиб ўтмаса, унда фигура чекланмаган бўлади.

22. Томонларининг сони тоқ бўлган ҳар қандай кўпбурчак симметрия марказига эга бўлмаслигини исботланг.

23. $A(-2;4)$ ва $B(4;-6)$ нуқталарининг симметрия марказини топинг.

24. Координаталар бошига нисбатан $M(-2;3)$ нуқтага симметрик нуқтани топинг.

25. Марказга нисбатан симметрик тўғри чизиқлар параллел бўлишини исботланг.

26*. Берилган l тўғри чизиқни ва берилган айланани кесиб ўтганда, улар орасидаги кесма берилган M нуқтада тенг иккига бўлинадиган қилиб шу нуқта орқали тўғри чизиқ ясанг.

Кўрсатма. l тўғри чизиқни ёки айланани M нуқтага нисбатан симметрик алмаштиринг.

27*. ω ва ω_1 айланалари кесишган A нуқта орқали тўғри чизиқ ясанг. Бу тўғри чизиқнинг икки айланани кесиб ўтгандаги кесмалари тенг бўлсин.

Кўрсатма. Берилган айланаларнинг бирини A нуқтага нисбатан симметрик алмаштиринг.

28. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

29. Учта медианаси бўйича учбурчак ясанг. Медианалари кесишган нуқтага нисбатан медианалардан бирини симметрик алмаштиринг.

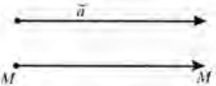
30. Берилган бурчакнинг ичида A нуқта ётади. A нуқта орқали бурчак томонлари орасида ётадиган кесмаси берилган нуқта орқали тенг иккига бўлинадиган тўғри чизиқ ўтказинг.

Кўрсатма. Бурчак томонларидан бирини A нуқтага нисбатан симметрик алмаштиринг.

31. Бир нуқтада кесишувчи уч тўғри чизиқ ва уларнинг бирида ётувчи A нуқта берилган. Бир учи A нуқтада, медианалари эса уч тўғри чизиқда ётадиган учбурчак ясанг.

Кўрсатма. $A \in a, a \cap b \cap c = 0$ бўлсин. $\frac{1}{2}AO = OD$ тенгликни қаноатлантирадиган D нуқтани топиш мумкин (медианаларнинг хоссаси). b ёки cни D нуқтага нисбатан симметрик алмаштиринг.

54.2. ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ



152-расм

$\vec{a}$ вектор берилсин.

Таъриф. **Текисликнинг ҳар бир M нуқтасини M' нуқтага $MM' = \vec{a}$ шарт бўйича ўзгартириш (152-расм) параллел кўчириш деб аталади.**

Бунда текисликнинг ҳар бир нуқтаси $\vec{a}$ векторнинг йўналиши бўйича текисликнинг фақат битта нуқтасига алмаштирилади. Бу ўзгартиришда жуфт-жуфти билан мос келувчи M ва M' нуқталар орасидаги масофа $\vec{a}$ векторнинг узунлигига тенг бўлади.

$\vec{a}$ вектор ва ўзаро мос келувчи бир қийматли M ва M' нуқталари берилса, унда текисликда параллел кўчириш (ўзгартириш) тўлиқ аниқланган бўлади.

Параллел кўчириш текисликнинг ўзини ўзига ўзаро бир қийматли алмаштириш бўлади. Чиндан ҳам, текисликда $\vec{a}$ вектор ва M нуқта берилса, унда $MM'=\vec{a}$ шарт бажариладиган фақат битта M' нуқта топилади (икки вектор тенглигининг таърифига асосан). Агар M' нуқтани $\vec{a}$ векторга қарама-қарши бўлган $\vec{a}$ вектор бўйича параллел кўчирсак, унда фақат битта

M нуқтага эга бўламиз. Агар $\vec{a}$ вектор нол-вектор ($\vec{0}$) бўлса, унда параллел кўчириш ўз-ўзига алмаштириш бўлади, бунда текисликнинг ҳар бир нуқтаси ўзи ўзи билан алмашади.

Агар текисликдаги F фигуранинг ҳар бир M нуқтасини берилган $\vec{a}$ векторга нисбатан параллел кўчирсак, M'га ўхшаш нуқталарнинг тўпламига эга бўламиз, улар F' фигурани аниқлайди. Демак, F фигура параллел кўчиришда F' фигурага ўтиб қолади.

Параллел кўчиришнинг хоссаларига тўхталиб ўтамиз.

1. Параллел кўчиришда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармайди.

$\vec{a}$ векторига параллел кўчирилувчи A ва B нуқталар берилсин (чизмани ўзингиз чизинг). Унда таърифга кўра $\overline{AA'} = \vec{a}, \overline{BB'} = \vec{a}$ бўлади, яъни $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Демак, икки вектор тенглигининг таърифи бўйича AA' ва BB' кесмалар параллел ва тенг бўлади. Шунинг учун $AA'B'B$ тўртбурчак параллелограмм бўлади, бундан $AB=A'B'$ эканлиги келиб чиқади.

2. Параллел кўчириш - ҳаракатдир. Бу 1-хоссадан келиб чиқади.

3. Параллел кўчиришда F фигура F' фигурага алмаштирилса, унда F ва F' фигуралар тенг бўлади.

Бу хоссанинг тўғрилиги 1-, 2- хоссалардан келиб чиқади.

4. Параллел кўчиришда ҳар қандай тўғри чизиқ унга параллел бўлган тўғри чизиққа алмашади.

Бу хоссанинг тўғрилиги 1-хоссадан келиб чиқади. Чиндан ҳам, A ва B нуқталар орқали ўтувчи AB тўғри чизиқ $A'B'$ тўғри чизиққа алмашади. Бунда $AA'B'B$ параллелограмм бўлганлиги сабабли, $AB \| A'B'$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, параллел кўчиришда параллел тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқларга ўтади.

МАШҚЛАР

1. $\vec{a}$ вектор берилган. Бу векторга нисбатан: а) A, B нуқталарни; б) CD кесмани; в) a тўғри чизиқни; г) ABC учбурчакни; д) берилган айланани параллел кўчиринг.

2*. Агар учбурчакнинг икки медианаси тенг бўлса, унда бу учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. ABC учбурчакнинг AE ва CD медианалари тенг бўлсин. $AB=CE$ эканлигини кўрсатсак, масала ечилади. Бунинг учун ADC ва CEA учбурчакларнинг тенглигини кўрсатиш зарур. Шу мақсадда CD медианани DE вектор бўйича параллел кўчиринг.

3*. Трапециянинг асослари йиғиндиси диагоналлар йиғиндисидан кичик, уларнинг айирмасидан катта эканлигини исботланг.

Кўрсатма. $ABCD$ трапециянинг BD диагоналини DC вектори бўйича параллел кўчириб, ундан сўнг учбурчакнинг томонларини таққослаш теоремасидан фойдаланинг.

4*. Агар $ABCD$ тўртбурчакнинг MN ўрта чизиғи (M- AD томонининг ўртаси, N-BC томонининг ўртаси) AB ва CD асосларининг ярим йиғиндисига тенг бўлса, унда тўртбурчак трапеция бўлишини исбот қилинг.

Кўрсатма. 3-масаладаги кўрсатмадан фойдаланинг.

5. $\vec{a}(3;-5)$ вектор берилган. Бу векторга нисбатан: а) координаталар боши ва $M(4;6)$ нуқтани; б) ox ўқини в) oy ўқини параллел кўчиринг.

6. Параллел кўчиришда берилган тўғри чизиқ яна ўзига параллел тўғри чизиққа ўтишини исботланг.

7. Параллел кўчиришда икки параллел тўғри чизиқ яна параллел тўғри чизиқларга ўтишини исботланг.

Кўрсатма. 6-масаланинг ечимидан фойдаланинг.

8. ABC учбурчакни BC вектор бўйича параллел кўчирсак $A'B'C'$ учбурчакни оламиз. ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларининг периметрларини таққосланг.

9. Тўрт томони бўйича трапеция ясанг.

Кўрсатма. Кичик асосини бир йўналишига нисбатан ён томонининг бирини параллел кўчиринг.

10. Учи чизмада кўрсатилмаган бурчак биссектрисасини ясанг.

Кўрсатма. Берилган бурчакнинг томонларини бир хил масофага параллел кўчириш керак.

11. Асослари ва диагоналлари бўйича трапеция ясанг.

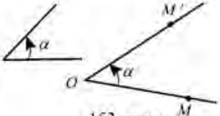
Кўрсатма. 9-масала кўрсатмасидан фойдаланинг.

12*. Уч медианаси бўйича учбурчак ясанг.

Кўрсатма. ABC учбурчакнинг медианаларининг кесишиш нуқтаси O бўлсин. OC кесмани $\overline{OB}$ векторга нисбатан параллел кўчирсак, $O'BC'C$ параллелограммга эга бўламиз. OAC учбурчакни ясаш мумкин. Унинг томонлари берилган медианаларнинг $\frac{2}{3}$ қисмини ташкил қилади.

54.3. БУРИШ

Нуқта атрофида буришга тўхталамиз. α йўналтирилган бурчак ва O нуқта берилсин (153-расм).



153-расм

Таъриф. Текисликнинг M нуқтасини $OM=OM'$, $\angle MOM'=\alpha$ шарти бажариладиган қилиб M' нуқтага алмаштириш M нуқтани O нуқта атрофида α бурчакка буриш деб аталади.

Бунда O- буриш маркази, α → буриш бурчаги деб аталади. Буришда O марказ ўз-ўзига ўтади деб ҳисобланади.

O марказ атрофида буриш α бурчак йўналиши билан бир хил бажарилса, унда бу буриш мусбат йўналишда (α - мусбат) бўлади, акс ҳолда, агар α бурчак йўналишига тескари йўналишда (α - манфий) бажарилса, у ҳолда бу буриш тескари буриш деб аталади. α бурчак йўналиши кўрсатилмаса, бу буришни ўнг буриш деб тушунамиз. α бурчаги 0 билан 2π нинг орасида ўзгаради ($O \le \alpha \le 2\pi$). Агар $\alpha=0$ (ёки 2π) бўлса, унда M нуқта ўзига алмашган бўлади (ёки айнан алмаштирилган) бўлади. Бу ҳолда айнан алмаштиришга эга бўламиз.

Нуқта атрофида буриш бир қийматли алмаштириш бўлади. Шунинг учун у геометрик алмаштириш бўлиб ҳисобланади.

Чиндан ҳам, текисликда O марказ, α бурчак (берилган бир йўналиш бўйича) ва M нуқта берилса, $OM=OM'$, $\angle MOM' = \alpha$ шартини қаноатлантирувчи фақат битта M' нуқтани топиш мумкин ва берилган О марказ атрофида M' нуқтани α бурчакка (α га қарама-қарши) бурсак, фақат биргина M нуқтага эга бўламиз. Бу ҳолда аввалгига нисбатан тескари буришга эга бўламиз.

Нуқта атрофида буришнинг қуйидаги хоссалари бор.

1. Нуқта атрофида буришда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармайди.

О буриш маркази ва α буриш бурчагига нисбатан буриш берилсин. A ва B нуқталар бу буришда A' ва B' нуқталарга ўтади (тегишли чизмани мустақил бажаринг).

Буриш таърифига асосан,

$$OA=AO', OB=OB', \angle AOA' = \angle BOB' = \alpha \cdot$$

У ҳолда

$$\angle AOA' - \angle BOA' = \angle BOB' - \angle BOA'$$

$$\angle AOB = \angle A'OB'$$

Натижада $\Delta OAB = \Delta OA'B'$ бўлади. Шундай қилиб $AB=A'B'$ га эга бўламиз.

2. Нуқта атрофида буриш - ҳаракатдир. Бу хоссанинг тўғрилигини ҳаракатнинг таърифи ва 1-хосса ёрдамида кўрсатиш мумкин.

3. F фигурани берилган буриш бўйича алмаштирганда F' фигура ҳосил бўлса, унда F ва F' фигуралари тенг бўлади.

F фигуранинг O нуқта атрофида α бурчакка бурганда F' фигураси ҳосил бўлди, деб ҳисоблайлик. Унда F фигурадан олинган, A,B икки нуқтага F' фигуранинг A',B' икки нуқтаси мос келади. 1-хосса асосида $AB=A'B'$ бўлади. Унда фигуралар тенглигининг таърифига асосан, F ва F' фигуралар тенг бўлади.

Натижада нуқта атрофида буришда тўғри чизиқ, нур мос ҳолда тўғри чизиққа ва нурга ўтади. Бу натижанинг тўғрилиги тўғридан-тўғри 3- хоссадан келиб чиқади.

4. Агар буриш бурчаги $\alpha=180^0$ бўлса, унда O марказ атрофида буриш марказий симметрик бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, буришда M нуқта M' нуқтага ўтса, унда M,O,M' нуқталари бир тўғри чизиқда ётиб, марказий симметрия таърифига бўйсунади.

МАШҚЛАР

1. O ва M нуқталари берилган. M нуқтани O нуқта атрофида (соат стрелкаси йўналишига қарши йўналишда) а) 60^0; б) 90^0; в) 180^0га бурганда ҳосил бўлган M' нуқтани ясанг.
2. O марказ, α бурчак берилган. а) AB кесмани; б) a тўғри чизиқни; в) ω айланани (берилган йўналишда) α бурчакка буринг.
3. $\alpha=180^0$ бўлганда буриш марказий симметрик эканлигини исбот қилинг.
4. ΔABC берилган. A учи атрофида 90^0га бурганда $\Delta AB'C'$ ҳосил бўлади. Шуни ясанг.
5. Ҳар бир учи берилган параллел уч тўғри чизиқда ётган тенг томонли учбурчакни ясанг.

   Кўрсатма. Берилган тўғри чизиқларнинг биридан A нуқта белгиланг. Қолган икки тўғри чизиқдан бирини A нуқта атрофида 60^0 бурчакка буринг.

6. Учлари умумий марказга эга бўлган учта айланада ётган тенг томонли учбурчакни ясанг.

Кўрсатма. 5-масаланинг кўрсатмасидан фойдаланинг.

7. Учта учи берилган учта тўғри чизиқда ётувчи квадратни ясанг (5-масаланинг ечимидан фойдаланинг).

8. Бурчак ва унинг ичида ётган A нуқта берилган. Тўғри бурчагининг учи A нуқтада, қолган икки учи берилган бурчакнинг томонларида ётган тенг томонли тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

Кўрсатма. Берилган бурчак томонларининг бирини A нуқта атрофида 90^0га буринг.

9. xOy системасида $A(2;0)$ ва $B(0;-3)$ нуқталар берилган. Координаталар боши атрофида бу нуқталарни соат стрелкаси йўналишига нисбатан:
а) қарама қарши йўналишда; б) бир хил йўналишда 90^0га бурсак, қандай нуқталар ҳосил бўлади?

55-§. ГОМОТЕТИЯ. ЎХШАШ АЛМАШТИРИШ

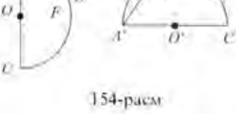
Биз ҳаракатда фигуранинг шакли ҳам, ўлчами ҳам, яъни чизиқли катталиклари ҳам ўзгармаслигини кўрдик. Геометрияда шаклини ўзгартирмасдан, бироқ чизиқли катталикларини бир хил сонга орттирувчи ёки камайтирувчи алмаштириш ҳам кўрилади. Бундай алмаштириш қаторига ўхшаш алмаштириш киради.

Таъриф. Текисликнинг ҳар қандай *A* ва *B* нуқталарини мос ҳолда *A′* ва *B′* нуқталарга $A'B' = k\cdot AB(k\neq 0)$ **шарт бўйича алмаштириш ўхшаш алмаштириш деб аталади**.

Бунда k сони ўхшашлик коэффициенти деб аталади.

Ўхшаш алмаштириш ўзаро бир қийматли бўлиши тушунарли.

F фигураси берилган бўлсин. Унинг ҳар бир M нуқтасини k ўхшашлик коэффициенти бўйича M' нуқтага алмаштирамиз. Унда M' нуқталарнинг тўплами F' фигурани ифодалайди. Бунда F' фигураси F фигурадан ўхшашлик алмаштириши натижасида олинган бўлади. Бундай F ва F' фигуралар ўхшаш деб аталади ва $F\sim F'$ деб белгиланади (бунда «~» ўхшашлик белгиси). Масалан 154-расмдаги фигуралар ўхшаш. Агар $k=1$ бўлса, унда ўхшаш алмаштириш ҳаракат бўлади.



154-расм

Ўхшаш алмаштириш таърифига кўра $A'B'=k\cdot AB$ (1) бўлади. (1) тенглик $F\sim F'$ фигураларнинг барча нуқталари учун тўғри.

Шунинг учун ўхшаш фигураларнинг мос келувчи кесмаларининг нисбатлари тенг (пропорционал) бўлади.

Унда учбурчакларнинг ва кўпбурчакларнинг ўхшашликлари қуйидагича аниқланади.

Агар икки учбурчакнинг томонлари пропорционал ва мос бурчаклари тенг бўлса, унда улар ўхшаш учбурчаклар дейилади.

Демак, ΔABC ва $\Delta A'B'C'$ учун

$$AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A',$$

$$\angle A=\angle A';\angle B=\angle B',\angle C=\angle C'$$

бўлса, унда $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ бўлади. Агар икки кўп бурчакнинг мос томонлари пропорционал, мос бурчаклари тенг бўлса, улар ўхшаш кўпбурчаклар бўлади.

Бундан, икки мунтазам n бурчаклар ўхшаш бўлади, деб айта оламиз. Чунки, уларнинг мос томонларининг нисбатлари тенг ва мос бурчаклари ҳам ўзаро тенг. Икки мос n бурчакнинг ўхшашлик коэффициенти уларнинг икки томони нисбатига ёки уларга ташқи (ички) чизилган айланалар радиусларининг нисбатига тенг бўлиши тушунарли.

O нуқта ва $k\neq 0$ сони берилсин.

Таъриф. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасини $OM'=k\cdot OM$ шартни қаноатлантирувчи, OM тўғри чизиқда ётувчи M' нуқтасига алмаштириш гомотетия[1] ёки марказий ўхшаш алмаштириш деб аталади.

Бунда O-гомотетия маркази, k -гомотетия коэффициенти бўлади. M ва M' гомотетик нуқталар бўлади. O маркази ўзига-ўзи гомотетик деб ҳисобланади (155-расм).

Агар $k>0(k<0)$ бўлса, унда OM ва OM' кесмаларнинг йўналишлари бир хил (қарама-қарши) бўлади, ёки M ва M' нуқталари O марказидан бир (турли) томонларда ётади.

Бу ҳолда Mва M' нуқталари тўғри (тескари) гомотетик нуқталар дейилади.

155-расм

---

[1] Грекча - ўзаро ўхшаш жойлашган, деган маънони тушунтиради.

O маркази ва k коэффициенти бўйича берилган гомотетия F фигурасининг ҳир бир M нуқтасини M' нуқтага алмаштирсин. Унда M' нуқталарнинг тўплами F' фигурани аниқлайди. Бунда F ва F' фигуралар гомотетик фигуралар деб аталади.

Агар $k=1$ бўлса, унда $OM'=OM$ бўлади ва M нуқта ўзига гомотетик бўлган M' нуқта билан устма-уст тушади. Бу ҳолда тенгдош гомотетияга эга бўламиз, бунда ҳар қандай фигура ўзига-ўзи гомотетик бўлади.

Агар $k=-1$ бўлса, унда таърифнинг асосида $OM'=-OM$ бўлади. Бу ҳолда M' нуқталар O марказдан турли томонларда ётади ва ундан бир хил узоқликда бўлади ёки M ва M' нуқталар O марказига нисбатан симметрик бўлади.

O маркази, k коэффициенти билан берилган гомотетия M нуқтани M' нуқтага алмаштирса, унда ўша O маркази ва $\frac{1}{k}$ коэффициенти билан олинган гомотетия унга тескари деб айтилади у *M' нуқтани қайта* М нуқтага алмаштиради, ҳақиқатан ҳам $OM'=kOM$ тенглигидан $OM=\frac{1}{k}OM$ ни оламиз.

Гомотетия қуйидаги хоссаларга эга.

1. Гомотетия ўзаро бир қийматли алмаштириш бўлади.

O маркази ва k коэффициенти бўйича гомотетия берилсин. M нуқтани M' ва M'' икки нуқтага алмаштирсин, деб фараз қилайлик. Унда $OM' = k\cdot OM$ ва $OM'' = k\cdot OM$ бўлади. Бундан $OM'=OM''$ тенглигига эга бўламиз ёки M' ва M'' нуқта устма-уст тушади. Демак, берилган гомотетияда M нуқта фақат битта M' нуқтага алмаштирилади, тескари гомотетияда M' нуқта қайтадан фақат битта M нуқтага алмашади.

2. Гомотетия маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ ўзига ўзи алмашади.

a тўғри чизиқ 0 гомотетия маркази орқали ўтсин. Берилган гомотетия a тўғри чизиқнинг ҳар бир M нуқтасини M' нуқтага алмаштиради. Таърифга асосан M, O, M' нуқталари бир тўғри чизиқда (a да) ётиши керак. Демак, M' нуқта a тўғри чизиқда ётади.

3. Агар O марказ, k коэффициент бўйича берилган гомотетия AB кесмани $A'B'$ кесмага алмаштирса, унда $A'B' = k\cdot AB$ ва $A'B' \| AB$ бўлади. A ва B нуқталари O марказ орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётмасин. Берилган гомотетия A ва B нуқталарини мос ҳолда A' ва B' нуқталарига алмаштиради

(156-расм). Унда $OA' = k \cdot OA, OB' = k \cdot OB$ бўлади. Бундан $OA':OB'=OA':OB$.

Худди шунга ўхшаш, $\overrightarrow{OA'} = |k| \cdot \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = |k| \cdot \overrightarrow{OB}$ $A'B' = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} : |k|(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = |k| \cdot \overrightarrow{AB}$ ёки $\overrightarrow{A'B'} = |k| \cdot \overrightarrow{AB}$. β - умумий бурчак, $\overrightarrow{A'B'}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторлари параллел ва бир хил йўналишда, шунинг учун $A'B' = k \cdot AB$, $A'B' \| AB$ бўлади.

1-натижа. Гомотетик тўғри чизиқлар параллел бўлади.

Бу 3-хоссадан келиб чиқади ($A'B' \| AB$, чунки $\alpha = \alpha'$).

2-натижа. Гомотетия ўхшаш алмаштиришдир.

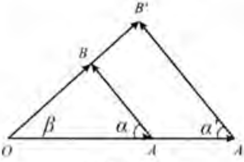
Бу натижанинг тўғрилиги ўхшаш алмаштиришнинг таърифдан ва 3-хоссадан келиб чиқади. Демак, гомотетиянинг барча хоссалари ўхшашлик алмаштириш учун ҳам тўғри бўлади.

4. Гомотетияда параллел икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқларга ўтади. $a \| b$ тўғри чизиқлар ва қандайдир бир гомотетия берилсин. Берилган гомотетия a ва b тўғри чизиқларни мос ҳолда a' ва b' тўғри чизиқларга алмаштиради. Бироқ, 1-натижа асосида $a \| a'$, $b \| b'$. Шартга кўра, $a \| b$ бўлганлиги сабабли $a' \| b'$ бўлади.

Демак, гомотетияда икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак ўзгармайди ёки берилган бурчак унга тенг бурчакка алмашади.

Яна бир хусусиятни белгилаб кетайлик. $k>0$ коэффициенти орқали берилган ўхшаш алмаштириш қандайдир F фигурани F' фигурага алмаштирсин. Унда F фигурасидаги ихтиёрий AB кесма F' фигурада унга мос келувчи $A'B' = k \cdot AB$ (1) кесмага алмашади.

Энди O марказ ва k коэффициент билан берилган гомотетия F ни $F_{/}$ фигурага алмаштирсин. У ҳолда F фигурадаги AB кесма $F_{/}$ фигурада унга тўғри келувчи $A_1B_1 = k \cdot AB$ (2)



156-расм

кесмага алмаштиради. Унда (1), (2) тенгликлардан $A_1B_1 = A'B'$ (3) деб ёза оламиз. F_1 ни F' га устма-уст тушадиган қилиб ҳаракат қилдириш мумкин. Бу юқоридаги мулоҳазалар F, F', F_1 фигураларнинг барча мос келувчи нуқталари учун тўғри бўлади. Демак, F фигурани аввал гомотетик алмаштириб, ундан кейин ҳаракат асосида F' фигурани олиш мумкин. Шундай қилиб, ўхшаш алмаштиришни гомотетия ва ҳаракатнинг кетма-кет бажарилиши (кўпайтмаси ёки композицияси) деб ҳисоблаш мумкин.

МАШҚЛАР

1. Ҳар қандай фигура ўзига ўзи гомотетик бўлишини исботланг.
2. Тенг фигуралар гомотетик бўладими?
3. Гомотетиянинг бир тўғри чизиқда ётмаган иккита мос келувчи нуқталари берилса, унинг марказини топинг.
4. Гомотетиянинг O маркази, $k=2$ коэффициент берилса, ABC учбурчакка гомотетик учбурчакни ясанг.
5. ABC учбурчак берилган. Унинг ўрта чизиқлари орқали $A'B'C'$ учбурчак ясалган. Берилган учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтага нисбатан бу икки учбурчак гомотетик эканлигини исботланг.
6. Бир-бирига тенг бўлмаган икки айлана гомотетик бўлишини исботланг.
7. Гомотетияда: а) параллелограмм; б) трапеция; в) ромб қандай фигурага алмашади?
8. xOy системада O маркази, $k=3$ коэффициенти бўйича берилган гомотетияда, $A(1;0)$. $B(0;2)$; $C(-2;0)$; $Д(0;-1)$ нуқталари қандай нуқталарга алмаштирилади?

Кўрсатма: $\overline{OM'} = k \cdot OM$ тенглигидан фойдаланинг.

56-§. ЎХШАШ ФИГУРАЛАР. УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ЎХШАШЛИК АЛОМАТЛАРИ

Биз юқорида (55-§) ўхшаш фигураларни алмаштиришлар орқали олиш мумкин эканлигини кўриб чиқдик. Ўхшаш фигураларга таъриф бердик, уларнинг хоссаларини кўрсатдик. Уларнинг ичида ўхшаш учбурчакларга 55- §да таъриф берилган. Бунда ўша тушунчаларга асосланиб, учбурчакнинг ўхшашлик белгиларигагина тўхталиб ўтамиз.

Учбурчаклар ўхшашлигининг уч аломати бор. Улар қуйидагидек теоремалар орқали ифодаланади.

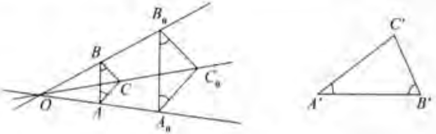
65-теорема (1-белгиси). Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса, унда бу учбурчаклар ўхшаш бўлади.

Исбот. ΔABC ва $\Delta A'B'C'$ берилган (157-расм). $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

бўлишини исбот қиламиз.

Ихтиёрий 0 марказ ва $k=A'B':AB$ коэффициент бўйича аниқланган гомотетияни қараб чиқамиз. Бу гомотетия ΔABCни ва $\Delta A_0B_0C_0$га алмаштиради. Гомотетиянинг хоссалари асосида $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$, шу билан бирга $B_0 = k \cdot AB$, $\angle A = \angle A_0$; $\angle B = \angle B_0$ бўлади. Бироқ, теорема шарти



157-расм

ва ясашга кўра $A'B' = k \cdot AB; \angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

Бундан $A'B' = A_0B_0$; $\angle A' = \angle A_0$ $\angle B = \angle B_0$. Учбурчаклар тенглигининг 2-аломати бўйича $\Delta A_0B_0C_0 = \Delta A'B'C'$.

55-§ да охирги тушунчалар асосида $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Теорема исбот қилинди.

***66-теорема*. (2-аломати). Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига пропорционал бўлса ва шу томонларнинг орасидаги бурчаклари тенг бўлса, унда бу учбурчаклар ўхшаш учбурчаклар бўлади.**

Исбот. 157-расмдан фойдаланамиз. ΔABC, $\Delta A'B'C'$ да A'B':AB=B'C':BC, $\angle B = \angle B'$ бўлсин. Учбурчакларнинг ўхшашлигини исбот қиламиз.

Ихтиёрий O марказ ва k=A'B':AB коэффициенти билан берилган гомотетия ΔABCни унга ўхшаш бўлган $\Delta A_0B_0C_0$га алмаштиради, $A_0B_0 = k \cdot AB, B_0C_0 = k \cdot BC, \angle B = B_0$ бўлади.

Теорема шартига кўра $A'B' = k \cdot AB, B'K' = k \cdot BC, \angle B = \angle B'$. Бундан $A_0B_0 = A'B'$, $B_0C_0 = B'C'$, $\angle B = \angle B'$ бўлади. Учбурчаклар тенглигининг 1-аломати бўйича $\Delta A_0B_0C_0 = \Delta A'B'C'$. 55-§даги охирги тушунчалар асосида $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

67-теорема **(3-аломати). Агар бир учбурчакнинг учала томони иккинчи учбурчакнинг учала томонига мос равишда пропорционал бўлса, унда бу учбурчаклар ўхшаш бўлади.**

Исбот. 157-расмдан фойдаланамиз. $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ да $A'B':AB = B'C':BC = A'C'$ бўлсин. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C''$ бўлишини исбот қиламиз. Теореманинг исботи юқоридаги 65, 66-теоремалар исботига ўхшаш. Исботни мустақил бажаринг.

Натижалар. Агар тўғри бурчакли учбурчаклар: 1) биттадан тенг ўткир бурчакка эга бўлса; 2) бирининг катетлари иккинчисининг катетларига пропорционал бўлса, улар ўхшаш бўлади.

1-ҳолнинг тўғрилиги 65-теоремадан келиб чиқади, чунки икки тўғри бурчакли учбурчакнинг биттадан ўткир бурчаклари тенг бўлса, унда уларнинг иккинчи ўткир бурчаклари ҳам тенг бўлади (тўғри бурчаклари тенг).

2- ҳолнинг тўғрилиги 66-теоремадан келиб чиқади.

МАШҚЛАР

1. Ўхшаш фигураларга мисоллар келтиринг.Улар нима учун ўхшаш эканлигини тушунтиринг.
2. Биринчи квадратнинг периметри 24 см, иккинчи квадратнинг томони 18 см бўлса, уларнинг ўхшашлик коэффициентини топинг.
3. Айлананинг диаметри 8 см; k=2,5 ўхшашлик коэффициенти бўйича аниқланган иккинчи айлана радиусини топинг.
4. Учбурчак томонларининг нисбати 3:4:5га тенг. Унга ўхшаш учбурчакнинг кичик томони 12 дм. Иккинчи учбурчакнинг қолган томонларини топинг.
5. Учбурчакнинг томонлари нисбати 3:5:6га тенг. Унга ўхшаш учбурчакнинг периметри 4,2 дм. Иккинчи учбурчакнинг томонларини топинг.
6. ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларида $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$. Бу учбурчаклар учун: 1) $a=20$; $b=28$; $a_1=50$, $c_1=40$ бўлса, c ва b томонларини; 2) $a=105$; $a_1=63$; $c-c_1=24$ бўлса, c томонини топинг.
7. Икки тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаклари тенг. Бир учбурчакнинг ён томони ва асоси 8,5 дм ва 5 дм. Иккинчисининг асоси 4 дм. Унинг ён томонини топинг.

8. Агар икки учбурчакнинг томонлари қуйидагича бўлиб берилса, улар ўхшаш бўладими: 1) 0,1 дм; 0,15 м; 0,2 м ва 1 см; 1,5 см; 2см; 2) 5м; 10 м; 75 дм ва 64 дм, 40 дм, 80 дм; 3) 10м; 20; 12,5м ва 100 см, 90 см, 160 см?

9. Бир учбурчакнинг томонлари 8 дм, 16 дм ва 20 дм. Унга ўхшаш учбурчакнинг периметри 55 дм. Иккинчи учбурчакнинг томонларини топинг.

10. Бир учбурчакнинг периметри унга ўхшаш учбурчак периметрининг $\frac{3}{11}$ қисмини ташкил қилади. Икки ўхшаш томонининг айирмаси 10 дм. Шу томонларни топинг.

11. ABCучбурчакда $AC\|DE(D \in AB; E \in BC)$ кесма ўтказилган. Агар: 1) $AC=2$ дм; $AB=1,7$ дм ва $BD=11,9$ см бўлса, DE кесмани; 2) $AB=1,6$ дм; $AC=20$ см ва $DE=1,5$ дм бўлса, AD кесмани; 3) $AC : DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$ бўлса, унда $AD:BD$ нисбатини топинг.

12. Берилган периметри бўйича учбурчакка ўхшаш учбурчакни ясанг.

13. Бурчакнинг ичида ётган M нуқта орқали ўтиб, шу бурчак томонларига уриниб ўтувчи айланани ясанг.

14. Берилган учбурчакнинг ичида ва барча учлари унинг томонларида ётувчи ромбни чизинг. Ромбнинг ўткир бурчаги берилган.

Кўрсатма. Аввал изланаётган ромбга ўхшаш, бироқ учта учи берилган учбурчакнинг икки томонида ётган ромбни чизинг. Ундан сўнг уни учбурчакнинг учи бўйича гомотетик алмаштиринг.

15. Берилган учбурчакнинг ичида, берилган параллелограммга ўхшаш параллелограмм чизинг.

16. Берилган ромбга ички чизилган квадратни ясанг.

17. Бир беш бурчакнинг томонлари 3,5 дм; 1,4 дм; 2,8; 2,1 дм ва 4,2 дм. Унга ўхшаш бешбурчакнинг кичик томони 1,2 дм. Унинг қолган томонларини топинг.

18. Бир тўртбурчак томонларининг нисбати $1 : \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 2$ нисбатга тенг. Унга ўхшаш тўртбурчакнинг периметри 7,5 м. Иккинчи тўртбурчак томонларини топинг.

19. Бир тўртбурчакнинг томонлари 1 м; 1,5м; 2м ва 2,5м. Унга ўхшаш тўртбурчакнинг энг катта ва энг кичик томонларининг йиғиндиси 2,8 м. Иккинчи тўртбурчакнинг томонларини топинг.

20. Икки ўхшаш кўпбурчакнинг энг катта томонлари 3,5 м ва

1,4 м. уларнинг периметрлари айирмаси эса 6 м. Периметрларини топинг.

57-§. ЎХШАШ КЎПБУРЧАКЛАР ЮЗЛАРИНИНГ НИСБАТИ

67-теорема. **Ўхшаш кўпбурчаклар юзларининг нисбати ўхшашлик коэффициентининг квадратига тенг.**

Исбот. n бурчакли F_1 ва F_2 ўхшаш кўпбурчаклари берилсин. Уларнинг ўхшашлик коэффициентини k деб олайлик. Берилган кўпбурчаклар юзларини таққослаймиз.

$F_1 \sim F_2$ бўлганлиги сабабли, F_1 кўпбурчагини F_2 кўпбурчагига алмаштирувчи ўхшаш алмаштириш бўлади.

F_1 кўпбурчакни n учбурчакка бўламиз: $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Бунда Δ_i $(i = 1,2,3..., n)$ ички умумий нуқталарга эга бўлмайди ва $F_1 = \Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n$. Унда юқорида айтилган ўхшаш алмаштириш бу учбурчакларни F_2 кўп бурчакнинг $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ учбурчакларига алмаштиради ва Δ_i, Δ_i $(i = 1;2;...;n)$ ва $F_2 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + ... + \Delta_n$ бўлади. Агар Δ_i га учбурчакнинг асоси a_i ва баландлиги h_i бўлса, унда улар ўхшаш бўлган Δ_i учбурчакнинг a_i асоси ва h_i баландлиги мос ҳолда $a_i = ka_i$ ва $a_i = kh_i$ бўлади.

Кўпбурчакнинг юзини аниқлашдаги хоссалар асосида F_1 кўпбурчакнинг юзи:

$$S(F_1) = S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + ... + S(\Delta_n) = \frac{1}{2}a_1h_1 + \frac{1}{2}a_2h_2 + ... + \frac{1}{2}a_nh_n \quad (4)$$

бўлади. F_2 кўпбурчакнинг юзи:

$$S(F_2) = S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + ... + S(\Delta_n) = \frac{1}{2}a_1h_1 + \frac{1}{2}a_2h_2 + ... + \frac{1}{2}a_nh_n =$$

$$= \frac{1}{2}ka_1kh_1 + \frac{1}{2}ka_2kh_2 + ... + \frac{1}{2}ka_nkh_n = k \cdot S(F_1) \quad (5)$$

бўлади. бунда (4) формуладан фойдаландик.

(5) формуладан $S(F_2) : S(F_1) = k^2$ бўлади. Теорема исбот қилинди.

МАШҚЛАР

1. Агар квадратнинг томонини: а) уч марта орттирсак; б) тўрт марта камайтирсак, унинг юзи қандай ўзгаради?
2. Агар тенг томонли учбурчакнинг томонини: 1) икки марта орттирсак; 2) уч марта камайтирсак, унда унинг юзи қандай

ўзгаради?

3. Бир квадратнинг томони a, иккинчисиники b бўлса, уларнинг юзлари нисбатини топинг.
4. Айланага ташқи чизилган квадратнинг юзи берилган айланага ички чизилган квадратнинг юзидан қанча катта?
5. Учбурчак томони 8 см. Унга ўхшаш учбурчакнинг юзи уч марта катта бўлса, унда унинг мос келувчи томонини топинг.
6. Учбурчак томонларининг бири учта тенг бўлакларга бўлинди, бўлиниш нуқталари орқали иккинчи томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилди. Берилган учбурчакнинг ва тўғри чизиқлар орқали ҳосил бўлган учбурчаклар юзларининг нисбатини топинг.
7. Учбурчакнинг баландлиги h. Учбурчакнинг юзини тенг иккига бўлувчи ва асосига параллел бўлган тўғри чизиқ учбурчакнинг учидан қандай узоқликда бўлади?
8. Учта ўхшаш кўпбурчакларнинг юзлари йиғиндиси 484 см^2, уларнинг периметрлари нисбати 2:3:4га тенг. Ҳар бир кўпбурчак юзини топинг.
9. Томонлари a ва b бўлган икки мунтазам n томонли кўп бурчаклар юзаларининг нисбатини топинг.

   Кўрсатма. 41– §нинг 10-масаласидаги (1) формуладан фойдаланинг.
10. Битта айланага ташқи ва ички чизилган мунтазам n бурчак юзларининг нисбатини топинг.

    Кўрсатма. 41– §нинг 13,16-масалаларидаги (2) ва (3) формулалардан фойдаланинг.
11. Берилган айланага ички ва ташқи чизилган мунтазам: 1) уч; 2) олти бурчаклар юзларининг нисбатини топинг.

X БОБНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР САВОЛЛАР

1. Ўзаро бир қийматли алмаштиришни тушунтириб беринг. Мисоллар келтиринг.
2. Текисликда геометрик алмаштириш деган тушунчани қандай тушунтириш мумкин?
3. Ҳаракат фигурани қандай ўзгартиради?
4. Қандай фигуралар тенг фигуралар деб аталади?
5. Ҳаракатда тўғри чизиқ (кесма, нур) қандай фигурага алмашади?
6. Ҳаракатнинг қандай турлари бор?
7. Ўққа (марказга) нисбатан симметрия ҳаракат бўладими? Нима учун?
8. Нуқта атрофида буришни тушунтириб беринг. У ҳаракат бўладими? Нима учун?
9. Параллел кўчиришда фигуранинг қандай элементлари ўзгармайди?

10. Ўхшаш алмаштиришни тушунтириб беринг.
11. Қандай фигуралар ўхшаш бўлади? Мисоллар келтиринг.
12. Нима учун мунтазам *n* бурчаклар ўхшаш бўлади?
13. Ўхшаш алмаштиришда мос келувчи кесмаларнинг қандай ўзгаришини тушунтириб беринг.
14. Гомотетияга таъриф беринг. У қандай алмаштириш бўлади?
15. Гомотетияда тўғри чизиқ қандай тўғри чизиққа алмашади? Параллел тўғри чизиқлар-чи?
16. Гомотетия ўхшаш алмаштириш бўладими? Ўхшаш алмаштиришни гомотетия деб ҳисоблаш мумкинми?
17. Ўхшаш алмаштиришнинг, гомотетиянинг ва ҳаракатнинг қандай боғланиши бор?
18. Ҳаракат ўхшашлик алмаштириши бўла оладими? Тескарисини айтиш мумкинми?
19. Тенг фигуралар ўхшаш бўладими?
20. Икки учбурчакнинг ўхшашлик белгиларини айтиб беринг.
21. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари қандай ифодаланади?

X БОГА ДОИР МАСАЛАЛАР

1. Умумий марказга эга бўлган икки айлана берилган. Уларнинг маркази O бўлсин. Биринчи айлананинг M нуқтасига иккинчи айлананинг OM нурида ётган M нуқтаси мос келади десак, унда айланаларнинг нуқталари қандай мос келади? Бунда қандай алмаштиришга эга бўламиз?
2. Ярим айлана диаметрига тик проекцияланган. Ярим айлана билан диаметрнинг нуқталари қандай мос келади? Бу қандай алмаштириш бўлади?
3. AB кесманинг O марказидан CD кесмага проекциялаб MN кесмага эга бўлдик, деб ҳисоблайлик. MN кесма CD кесманинг ичида ётсин. Бу проекциялашда AB ва MN кесмаларнинг нуқталари қандай мос келади? AB ва CD кесмаларининг нуқталари-чи?
4. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасига унинг L тўғри чизиқдаги тик проекцияси бўлган M нуқта мос келсин. Текислик билан L тўғри чизиқнинг нуқталари ўзаро қандай мос келади?
5. а) Кесма; б) тўғри чизиқ; в) айлана; г) тенг томонли учбурчакда қанча симметрия ўқи бор?
6. а) кесма; б) тўғри чизиқ қанча симметрия марказига эга бўлади? Тушунтириб беринг.
7. Учбурчакнинг симметрия маркази бўлмаслигини исботланг.
8. Параллелограммнинг диагоналлари кесишган нуқтаси симметрия маркази бўлишини исбот қилинг.
9. Параллел икки тўғри чизиққа (марказга) нисбатан кетма-

кет бажарилган икки ўқли (марказли) симметриянинг натижаси параллел кўчириш бўлишини исботланг.

10. Ҳар қандай фигура ўзига ўхшаш бўлишини исботланг.

11. Агар F фигура F_1 фигурага, F_1 фигура F_2 фигурага ўхшаш бўлса, F ва F_2 фигуралар ҳам ўхшаш бўлишини исботланг. Ўхшашлик коэффициенти қандай бўлади?

12. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчаклар ўхшаш бўлишини исботланг.

13. Учбурчакнинг барча ўрта чизиқлари ўтказилган. Натижада берилган учбурчакка ўхшаш бўлган қанча учбурчак ясалади?

14. Трапециянинг асослари a ва b. Унинг диагоналлари кесишган нуқтада қандай нисбатларда бўлинади?

15. Учбурчакнинг томонлари 5 см, 7см, 4 см. Унга ўхшаш бўлган учбурчакнинг энг катта томони 21 см. Унинг қолган томонларини топинг.

16. Ўхшаш икки кўпбурчакнинг кичик томонлари 35 см ва 21 см, уларнинг периметрларининг айирмаси 40 см. Кўпбурчакларнинг периметрларини ҳисобланг.

ПЛАНИМЕТРИЯ БЎЙИЧА ҚИЙИНРОҚ МАСАЛАЛАР

1. Агар учбурчакларнинг биссектрисаси унинг периметрини тенг иккига бўлса, унда берилган учбурчак тенг ёнли бўлишини исботланг.

2. Параллелограммга унинг томонлари бўйича квадратлар ташқи чизилган. Уларнинг марказлари янги квадратнинг учлари бўлиб ҳисобланишини исботланг.

3. Трапециянинг асослари a ва b. Унинг асосларига параллел, ён томонлари орасида ётувчи ва трапецияни юзларини тенг икки бўлакка бўлувчи кесма узунлигини топинг.

4. Учбурчакнинг асосидаги бурчаклари α ва β $(\alpha > \beta)$ берилган. Асоснинг қаршисидаги учидан туширилган баландлик ва ички бурчак биссектрисасининг орасидаги бурчакни топинг.

5. Учбурчакнинг маркази қайси учига (томонига) яқин бўлади?

6. Учбурчакнинг баландликлари берилган. Юзини топинг.

7. Учбурчакнинг медианалари берилган. Томонларини топинг.

8. Учбурчакнинг томонлари a,b,c берилган. Марказидан учларигача бўлган масофаларни топинг.

9. Учбурчакнинг томонлари a,b,c берилган. Ташқи чизилган айлананинг марказидан учбурчак томонларигача бўлган оралиқларни топинг.

10. Радиуси Rга тенг бўлган ярим доиранинг диаметрига

мунтазам учбурчак чизилган. Унинг ярим доира ташқарисида ётган қисмининг юзини топинг.

11. Берилган доиранинг ичига берилган квадрат юзига тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясанг.

Кўрсатма. Тўғри тўртбурчак томонларини доиранинг радиуси ва квадратнинг томони орқали ифодаланг.

12. Берилган периметри орқали берилган айланага ички чизилган тўғри тўртбурчакни ясанг.

13. Циркул ва чизғич ёрдамида 19^0 бурчакни тенг 19 бўлакка бўлинг.

14. Циркул ва чизғич ёрдамида 7^0 бурчакни тенг 7 бўлакка бўлинг.

15. Параллелограммнинг ўткир бурчаги, 30^0 га, диагоналлари c ва d га тенг $(c>d)$. Унинг юзини топинг.

16. Томони a га тенг бўлган квадратнинг тўртта учи радиуслари a бўлган тўртта доиранинг марказлари бўлиб ҳисобланади. Шу доираларнинг умумий қисмининг юзини топинг.

Кўрсатма. Тегишли чизмани чизиб, изланаётган қисмнинг юзини x билан, квадратнинг қолган бўлакларининг юзларини мос y ва z билан белгилаб, уларнинг боғланишини квадратнинг, доиранинг тўртдан бир қисмининг ва қолган бўлакларининг юзлари орқали ифодаланг.

XI БОБ. СТЕРЕОМЕТРИЯ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

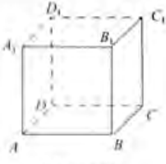
58-§. АЙҚАШ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

Икки тўғри чизиқни фазода ҳам кўриб чиқиш мумкин. Масалан, кубнинг қирралари бўйича аниқланган тўғри чизиқлар фазодаги тўғри чизиқларни эслатади. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг битта AA_1BB_1 ёғидаги (текисликдаги) ўзаро кесишувчи, параллел ва перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларнинг (кесмаларнинг) жуфтларини кўрсатинг (158-расм). Демак, текисликда икки тўғри чизиқ албатта: ё кесишади, ёки параллел бўлади. Аниқроқ айтганда, текисликдаги икки тўғри чизиқ мана шу икки ҳолатнинг бирдагина бўлади. Фазода бўлса ўзаро кесишмайдиган, параллел ҳам эмас, перпендикуляр ҳам эмас икки тўғри чизиқни кўрсатиш мумкин (4-ҳолат). Бундай тўғри чизиқлар **айқаш** тўғри чизиқлар деб аталади.

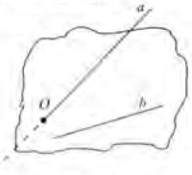
Фазодаги бундай тўғри чизиқлар бир текисликда эмас, балки турли текисликларда ётади.

Масалан, юқоридаги кубнинг BC ва DC қирралари орқали ўтган тўғри чизиқлар ҳам айқаш тўғри чизиқлар бўлади.

Умумий ҳолда бизга α текислиги, унинг O нуқтаси ва ўша текисликда ётувчи b тўғри чизиқ берилди, дейлик (159-расм). a тўғри чизиғи α текисликни унинг O нуқтаси орқали кесиб ўтсин. Унда a ва b тўғри чизиқлари айқаш тўғри чизиқлар бўлади, чунки улар кесишмайди ва бир текисликда ётмайди.



158-расм



159-расм

МАШҚЛАР

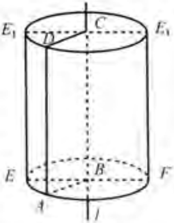
1. Фазодаги кесишувчи, параллел, перпендикуляр тўғри чизиқларга мисоллар келтиринг.
2. Синф хонасидаги параллел, перпендикуляр, кесишувчи ва айқаш тўғри чизиқларни кўрсатинг.
3. 158-расмдаги кубдан AB қиррасига айқаш бўлган тўғри чизиқларни кўрсатинг. Белгилаб ёзинг. Қанча айқаш тўғри чизиқлар мавжуд?
4. Кубнинг: 1) BC ва A_1D_1; 2) BC ва CC_1 қирралари қандай тўғри чизиқларни ифодалайди?

59-§. АЙЛАНМА ЖИСМЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Геометрик фигуралар фазода ҳам берилади. Уларнинг айримлари билан сиз танишсиз. Масалан: куб, тўғри бурчакли параллелепипед, шар ва бошқалар. Фазода уларни геометрик жисмлар деб атаймиз. Демак, геометрик жисмлар фазонинг ёпиқ ва чегараланган қисми сифатида қаралади.

Агар қандайдир ясси фигурани унинг текисликда ётган ℓ ўқи атрофида айлантирсак, унда фазода айланма жисмлар пайдо бўлади. Айланма жисмларнинг айримларига тўхталиб ўтамиз.

59.1. ЦИЛИНДР



160-расм

Таъриф. Тўғри тўртбурчакни унинг бир томони атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисм **цилиндр**[1] деб аталади. Агар $ABCD$ тўғри тўртбурчакни BC томони атрофида айлантирсак, унда ҳосил бўлган айланма жисм цилиндрни аниқлайди. Бунда BC тўғри чизиқ ёки ℓ айланиш ўқи цилиндрнинг ўқи бўлиб ҳисобланади. BC кесма цилиндрнинг баландлиги бўлиб ҳисобланади. Бу цилиндр тўғри доиравий цилиндр деб аталади. AD - цилиндрнинг ясовчиси бўлиб ҳисобланади. CD ва BA кесмалари ўқнинг атрофида айланишда тенг ва параллел доираларни аниқлайди. B, C нуқталари уларнинг

---

[1] Грекча сўз бўлиб, «айлантириш» маъносини билдиради.

марказлари бўлади. Бу доиралар цилиндрнинг **асослари** деб аталади, уларнинг радиуслари цилиндрнинг радиусини аниқлайди.

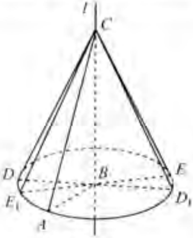
59.2. КОНУС

Таъриф. Тўғри бурчакли учбурчакни унинг бир катети атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм **конус**[1] деб аталади.

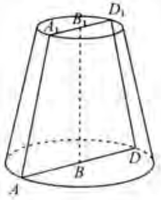
Агар ABC тўғри бурчакли учбурчакни (AC-гипотенуза, AB, BC - катетлар) катетининг атрофида айлантирсак, ундан пайдо бўлган жисм конусни ифодалайди (161-расм). Бунда BC катети орқали ўтган ℓ тўғри чизиқ конуснинг айланиш ўқи ёки конуснинг ўқи деб аталади. Ҳосил бўлган конус тўғри **доиравий конус** деб аталади.

AB катетнинг ℓ ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган доира конуснинг **асосини** ифодалайди, унинг радиуси AB катетига тенг. BC кесма конуснинг ўқи бўлиб ҳисобланади.

ABB_1A_1 тўғри бурчакли трапециянинг $(AB \perp BB_1, A_1B_1 \perp BB_1)$ BB_1 ўқи атрофида айлантирсак, унда кесик конус ҳосил бўлади (162-расм). Радиуслари AB, A_1B_1 бўлган доиралар кесик конуснинг асослари бўлиб ҳисобланади.



161-расм



162-расм

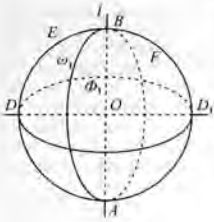
59.3. СФЕРА ВА ШАР

Сфера билан шар ўзаро боғлиқ. Аввал шар ҳақида тўхталиб ўтамиз.

Таъриф. Ярим доирани унинг диаметри атрофида

---

[1] Грекча сўз бўлиб қайинга ўхшаш, деган маънони билдиради.



163-расм

айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисм **шар** деб аталади.

Φ_1 ярим доира AB диаметри атрофида айлантирилганда шар ҳосил бўлади (163-расм). AB диаметри орқали ўтувчи l тўғри чизиқ айлананинг ўқи деб аталади. Шарни чегаралаб турган юза **сфера**[1] деб аталади. Бу сферани ω_1 ярим айланани l ўқи атрофида айлантириш натижасида хосил бўлган айлана юзи сифатида ҳам кўриш мумкин.

Сферанинг маркази, радиуси, диаметри, ўқи, ватари у чегаралаб турган шарнинг ҳам радиуси ($OA=R$), маркази (O), диаметри (AB), ватари (EF) бўлади.

Шарнинг текислик билан кесишиши натижасида доим доира ҳосил бўлади. Агар кесувчи текислик шарнинг марказидан ўтса, унда кесимда энг катта доира ҳосил бўлади. унинг радиуси шар радиусига тенг бўлади.Масалан, катта доиранинг айланаси глобусдаги экватор ва меридианлар бўлиб ҳисобланади.

МАШҚЛАР

1. Цилиндрнинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесишмаси, қандай фигура бўлади?
2. Цилиндрнинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесишмаси томони 8 см ли квадрат бўлса, цилиндрнинг радиуси ва ясовчисини топинг.
3. Цилиндрнинг ўқ кесимининг диагонали уни қандай учбурчакларга бўлади?
4. Томонлари 6см ва 10см бўлган тўғри тўртбурчакнинг бир томони атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган цилиндрнинг диаметри ва баландлигини ҳисобланг.
5. Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесганда қандай фигура ҳосил бўлади?
6. Конуснинг ясовчиси: 1) унинг баландлигига; 2) асосидаги айлана радиусига тенг бўлиши мумкинми?
7. Конуснинг асосига параллел текислик билан кесганда қандай фигура ҳосил бўлади? Уни чизиб кўрсатинг.
8. ABC тўғри бурчакли учбурчакда $AB=5$дм, $BC=4$дм, $CA=3$дм.

---

[1] Грекча сўз бўлиб, «тўп, копток» деган маънони билдиради.

Берилган учбурчакнинг: 1) *CA* катетини, 2) *BC* катети атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма жисм диаметрини, баландлиги ва ясовчисини топинг.

9. Баландлиги 16 см, радиуси 12 см конус баландлигининг ўртасидан ўтиб, асосига параллел бўлган текислик билан кесилган. Кесик конус асосларининг радиуслари ва баландлигини топинг.

10. Сфера билан шарнинг фарқини айтиб беринг.

11. Сферанинг текислик билан кесишмаси қандай фигура бўлади?

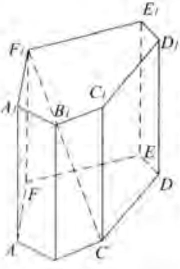
12. Шарнинг текислик билан кесишмаси қандай фигура бўлади?

13. Радиуси 8 см бўлган шарни текисликлар билан кесганда радиуслари 2 см ва 3 см бўлган доиралар ҳосил бўлди. Уларнинг қайси бири шар марказига яқин?

14. Шарнинг радиуси 10дм бўлса, унинг катта доирасининг узунлигини топинг.

Кўрсатма. Айлананинг узунлиги $C = 2\pi R$ формула орқали аниқланади, бунда C- айлана узунлиги, R-радиуси, π =3,14 деб олинг.

60-§. КЎПЁҚЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА



164-расм

Кўпёқлар фазодаги геометрик фигуралар (жисмлар) бўлади. Улар барча томондан кўпбурчаклар билан чегараланган фигуралар. Бу кўпбурчаклар унинг ёқлари деб аталади. Кўпёқнинг бир ёғида ётмаган икки учини туташтирувчи кесма унинг диагонали деб аталади. 164-расмда кўпёқ тасвирланган, унинг диагонали CF_1 . Кўпёқлар турлича ва мураккаб бўлади. Биз уларни 11-синфда мукаммал ўрганамиз. Ҳозирча айрим содда кўпёқларга тўхталиб ўтамиз.

60.1. ТЎҒРИ ПРИЗМА

Призма[1] энг содда кўпёқ бўлиб ҳисобланади. Куб, учланмаган олти қиррали қалам ва бошқалар призмага мисол бўлади.

Асослари деб аталувчи икки ёғи $ABCDEF$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ўзаро тенг кўп *n* бурчаклар ва уларнинг мос томонлари

---

[1] Грекча сўз бўлиб, кесиб олинган жисм деган маънони билдиради (бу қадимги термин).

параллел, қолган ёқлари тўғри тўртбурчак бўлган кўпёқ **тўғри призма** деб аталади (164-расм).

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмада ABB_1A_1; BCC_1B_1, ..., FAA_1F_1 тўғри тўртбурчаклар призманинг ён ёқлари, AA_1, BB_1, ...EF_1 ён қирралари деб аталади.

Призманинг ён қирралари унинг баландлиги бўлиб ҳисобланади. Асосидаги кўпбурчакка нисбатан призма учбурчакли, тўртбурчакли ва бошқалар бўлиши мумкин. 164-расмда 6 бурчакли призма тасвирланган, CF_1 унинг диагонали.

Куб, тўғри бурчакли параллелепипед призманинг айрим турлари бўлиб ҳисобланади, улар сизларга аввалдан таниш.

60.2. ПИРАМИДА

Кўпёқларнинг яна бир содда тури бўлиб пирамида[1] ҳисобланади. Унинг тасвири 165-расмда кўрсатилган.

Бир ёғи қандайдир кўпбурчак, қолган ёқлари умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат кўпёқ **пирамида**[1] деб аталади (165-расм).

Агар $ABCDE$ кўпбурчакни олиб, унинг учларини кўпбурчак текислигидан ташқарида ётган S нуқта билан туташтирсак, пирамида ҳосил бўлади (165-расм). Бу пирамидани $SABCDE$ орқали белгилаймиз. Кўпбурчак пирамиданинг асоси, SA, SB,...; ён қирралари, ABS, ..., AES учбурчаклари ён ёқлари бўлади.

Агар SO кесма AO ва BO кесмаларга перпендикуляр, аниқроғи пирамида асосининг текислигига перпендикуляр бўлса, унда SO пирамиданинг баландлиги деб аталади.

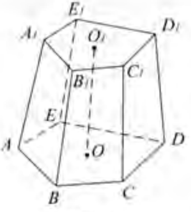
Пирамиданинг асоси учбурчак, тўртбурчак ва бошқалар бўлса, унда мос ҳолда учбурчакли, тўртбурчакли ва бошқа пирамидага эга бўламиз. 165-расмда бешбурчакли пирамида тасвирланган.

60.3. КЕСИК ПИРАМИДА

Агар $SABCDE$ пирамидани асосига параллел бўлган α текислиги билан кесганда пайдо бўлган $SA_1B_1C_1D_1E$ пирамидани олиб қўйиб, унинг қолган қисмига мустақил бир фигура деб қарасак, у ҳам кўпёқни ифодалайди (166-расм). Уни кесик пирамида деб атаймиз. Демак, пирамиданинг асосининг текислиги билан асосига параллел кесувчи текислик орасида ётган пирамиданинг бўлаги кесик пирамида деб аталади (166-расм).

---

[1] Грек сўзи қавариқ кўпёқ деган маънода. Араб тилидан олинган.



166-расм

$ABCDE$ ва $A_1B_1C_1D_1E_1$ кўпбурчаклари кесик пирамиданинг асослари, ABB_1A_1, BCC_1B_1,...,EAA_1E_1 тўртбурчаклари - ён ёқлари, AA_1, BB_1,...EE_1 - ён қирралари, OO_1 - баландлиги бўлади.

Тўлиқ пирамида каби, кесик пирамида ҳам уч, тўрт ва бошқа бурчакли бўлади.

МАШҚЛАР

1. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли тўғри призма чизинг.

2. Саккиз ёққа эга бўлган тўғри призманинг: 1) асоси қандай кўпбурчак; 2) қанча ёқлари бор?

3. Тўғри призманинг ён ёқларининг сони билан асосидаги кўпбурчак томонлари сонининг қандай боғлиқлиги бор?

4. Бешбурчакли тўғри призманинг қанча учи, ёғи, қирраси бор?

5. Кубнинг бир учидан чиқиб қирраларининг учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг.

6. Кубнинг қирраси *a*. Унинг: 1) ён ёғининг диагоналини; 2) кубнинг ўзининг диагоналини топинг.

7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг: 1) қарама-қарши қирралари; қарама-қарши ёқлари тенг бўлишини исботланг.

8. Тўғри тўртбурчакли параллелепипеднинг қирралари *a,b,c*. Унинг диагоналини топинг.

9. Тўғри тўртбурчакли параллелепипеднинг барча диагоналлари тенг бўлишини исботланг.

10. Агар тўғри тўртбурчакли параллелепипеднинг уч ўлчови: 1) 2м, 3м, 6м; 2) 3дм, 6дм, 12 дм бўлса, унинг диагоналларини ҳисобланг.

11*.Қирраларининг сони 15га тенг бўлган тўғри призма бўладими?

12. Учбурчакли; 2) тўртбурчакли пирамида чизинг. Учларини, қирраларини, ёқларини, асосини кўрсатинг, белгилаб ёзинг.

13. Бешбурчакли пирамиданинг қанча учи, ён томони, қирраси бор?

14. Пирамиданинг учи ва асосининг диагонали орқали ўтувчи текислик диагонал текисликни ифодалайди. 1) Тўртбурчакли пирамидада; 2) беш бурчакли пирамидада қанча диагонал кесим ўтказиш мумкин? Чизмада кўрсатинг.

15. Пирамиданинг барча ён қирралари ℓ га тенг, асоси a томонли квадрат. Пирамиданинг баландлигини ҳисобланг.

16. Тўртбурчакли пирамиданинг ён қирралари ℓ га тенг, баландлиги h, асоси тўғри тўртбурчак. Пирамида асосининг диагоналини топинг.

17. Кесик тўртбурчакли пирамида асосларининг томонлари 10дм ва 2дм бўлган квадратлар, ён қирралари 9дм. Пирамида баландлигини топинг.

18. Кесик пирамида асосларининг томонлари 4 см ва 1 см бўлган тенг томонли учбурчаклар, ён қирралари 5 см. Ҳар бир ёқнинг периметрини топинг.

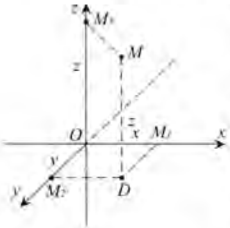
61-§. ФАЗОДА НУҚТА КООРДИНАТАЛАРИ

Фазода ҳам нуқтанинг координаталарини аниқлаш мумкин. У текисликдагига ўхшаш. Демак, фазода нуқтани координаталар (сонлар) орқали ифодалаб ёзиш учун фазодаги координаталар системасини тузиш талаб қилинади.

Фазода O нуқтада кесишувчи ва бир-бирига перпендикуляр бўлган Ox, Oy, Oz ўқларини оламиз (167-расм). Улар координата ўқлари деб аталади. Ox, Oy ўқлари қандай номланиши маълум, **Oz - апликата**[1] ўқи деб аталади. O- координаталар боши бўлади.

Ҳар бир икки ўқ орқали текислик ўтказиш мумкин, улар координата текислигини ифодалайди. Демак, учта координата текислиги бор. Ўқлар бўйича масштаб бирликларини текисликдаги каби танлаб олиш мумкин.

O - координата боши, ўқлар, улар бўйича масштаб бирликлари берилса, унда **фазодаги тўғри бурчакли координаталар** системаси аниқланган бўлади, уни қисқача $Oxyz$ орқали белгилаймиз.



167-расм

Бу системада M нуқта берилса, унга мос келувчи x, y, z уч сонининг, аксинча, x, y, z сонлари берилса, улар орқали аниқланувчи M нуқтани топиш мумкин.

M нуқта берилса, у орқали Oz ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, унинг x, y, z координата текислиги билан кесилиш нуқтасини топамиз, у D нуқта бўлади: $DM=OM_3=z$ деб белгилаймиз.

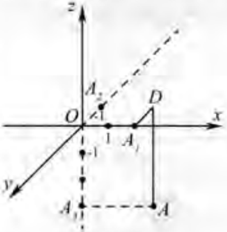
---

[1] Лотинча сўз бўлиб, «мустаҳкам боғланган» деган маънони билдиради.

Энди D нуқта орқали Ox, Oy ўқларига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, $M_1D=OM_2=y$; $M_2D=OM_1=x$ сонларини топамиз. Демак, M нуқта орқали x, O, y сонлари аниқланади.

Агар x,y,z сонлари берилса, унда $x=OM_1$ $y=OM_2=M_1D$ (Oy га параллел), $z=OM_3=DM$ (Oz га параллел) кесмаларни чизиб, M нуқтанинг топамиз. Бунда x,y,z сонларига нисбатан M нуқта топилди. Ҳар бир ҳол учун масштаб бирликлари ва x,y,z сонларининг ишоралари ҳисобга олиниши керак. Бу ҳолда x,y,z сонлари фазода M нуқтанинг координаталари деб аталади ва $M(x,y,z)$ деб белгиланади.

Масалан, $Oxyz$ системасида $A(2;-1;-3)$ нуқтани ясанг (168-расм). Ox ўқида $OA_1=2$ бирлик кесмани ўлчаб қўямиз, A_1 нуқтага эга бўламиз. A_1 нуқта орқали Oy уқига қарама-қарши йўналишда параллел нур чизиб, унга $A_1D=1$ кесмани ўлчаб қўямиз. D нуқта орқали Oz га қарама-қарши йўналишда параллел нур ўтказиб, $DA=3$ кесмани ясаймиз. A изланаётган нуқта бўлади.



168-расм

МАШҚЛАР

1. $Oxyz$ координаталар системасида $A(4;2;3)$; $B(-2;2;-2)$; $C(-3;1;2)$; $D(2;0;-3)$; $E(-2;-3;0)$; $F(5;0;0)$; $L\left(\frac{1}{2};3;-1\right)$ нуқталарни ясанг.

2. 1-масаладаги нуқталарнинг қайсиниси: 1) координата ўқларида; 2) координаталар текислигида ётади?

3. $Oxyz$ координаталар системасида: 1) $A(0;0;2)$ .2) $B(0;3;0)$; 3) $C(-3;0;0)$ нуқта қайси координаталар ўқида ётади? Уларни чизиб кўрсатинг.

4. $Oxyz$ координаталар системасида: 1) $A(-2;0;1)$; 2) $B(3;-2;0)$; 3) $C(0;2;5)$ нуқта қайси координаталар текислигида ётади?

5. $Oxyz$ координаталар системасида $E(-2;3;4)$ ва $F(2;-2;1)$ нуқталар берилган. EF кесмани ясанг.

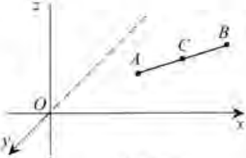
6. $Oxyz$ координаталар системасида берилган $K(2;3;-4)$ нуқта орқали ўтувчи координата текисликларининг ҳар бирига параллел бўлиб ўтказилган текислик координаталар ўқларини қандай нуқталарда кесиб ўтади?

7. Кубнинг қирраси 4 см. Бир учи $Oxyz$ координаталар системасининг боши 0 нуқтада, шу учидан чиқувчи қирралари координаталар ўқларининг мусбат йўналиши билан устма-уст тушади. Куб учларининг координаталарини топинг.

62-§. ФАЗОДА ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА. КЕСМА ЎРТАСИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

Текисликда xOy системасига нисбатан $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2;y_2)$ нуқталар берилса, улар орасидаги масофа

$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ (1) формула ёрдамида ҳисобланиши сизга маълум.



169-расм

Текисликдаги берилган икки нуқта орасидаги масофани топиш қоидаларига асосланиб, фазодаги $Oxyz$ системасида $A(x_1;y_1;z_1)$ ва $B(x_2;y_2;z_2)$ нуқталар берилса, уларнинг орасидаги масофани

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad (2)$$

формула орқали ҳисоблаш мумкин. (2) формуланинг тўлиқ чиқарилишига кейин тўхталамиз.

$A(x_1,y_1,z_1)$ ва $B(x_2,y_2,z_2)$ нуқталар билан чегараланган AB кесманинг ўртасида ётган $C(x_0;y_0;z_0)$ нуқтанинг координаталарини текисликдагига ўхшаш қилиб

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2};\ z_0=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3)$$

формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам, AC ва CB оралиқларни (2) формула орқали ҳисобласак (169-расм),

$$AC^2=(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1)^2+(\frac{y_1+y_2}{2}-y_1)^2+(\frac{z_1+z_2}{2}-z_1)^2=\frac{AB^2}{4}$$

ёки $$AC=\frac{1}{2}AB. \qquad (4)$$

Худди шунга ўхшаш $CB = \frac{1}{2}AB$ бўлади. Бу шартлар фақат C нуқта AB кесма ўртасида ётгандагина тўғри, яъни $C = (\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2})$ бўлади.

МАШҚЛАР

1. $Oxyz$ координаталар системасида $A(2;-3;4)$ ва $B(-4;5;4)$ нуқталар берилган. AB оралиқни топинг.
2. $A(-3;-4;3)$ ва $B(1;4;5)$ нуқталар берилган. 1) AB кесманинг ўртасидаги C нуқта координаталарини топинг. 2) AC ва CB кесмалар узунликларини ҳисобланг. 3) Улар AB кесманинг қандай қисмини ташкил қилади?
3. ABC учбурчакнинг учлари $A(-5;2;4)$; $B(1;6;-7)$; $C(3;-2;8)$ бўлсин учбурчакнинг: 1) периметрини; 2) AD медианасини топинг.
4. AB кесманинг боши $A(1;-3;4)$ ўртаси эса $C(3;-1;1)$ бўлса, B нуқтанинг координаталарини топинг.
5. $ABCD$ параллелограммнинг $A(1;-3;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;1;1)$ учлари берилган. 1) Диагоналларининг кесишган нуқтасини; 2) D учининг координаталарини; 3) BD диагоналини ҳисобланг.

63– §. ФАЗОДАГИ ЖИСМЛАР СИРТЛАРИНИНГ ЮЗЛАРИ ҲАҚИДА МАЪЛУМОТЛАР

Фазодаги содда жисмлар сиртларининг юзларини ҳисоблаймиз. У текисликдаги фигураларнинг юзларини топишга асосланган.

63.1. ТЎҒРИ ПРИЗМА СИРТИНИНГ ЮЗИ

Тўғри призма берилиб, асосининг томонлари $a_1, a_2, ..., a_n$, баландлиги h бўлсин (170-расм). Бу призманинг ҳар бир ён ёқлари тўғри тўртбурчак, бу тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндиси призма ён сиртининг юзини ифодалайди:

$$S_{ё.с.} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = (a_1 + a_2 + ... + a_n)h = Ph \qquad (1)$$

$S_{ё.с.}$ - ён сиртининг юзи, P - асосининг периметри. Демак, тўғри призманинг ён сиртининг юзи унинг асоси периметрини баландлигига кўпайтмасига тенг.

Энди тўғри призма тўлиқ сиртининг юзини топиш учун ён сиртининг юзига асосларининг юзлари қўшилади:

$$S_{т.с'}=S_{ё.с}+2S_a \qquad (2)$$

Бу ерда $S_{т.с}$ – призманинг тўлиқ сирти юзи, S_a - асосининг юзи.

63.2. ПИРАМИДА СИРТИНИНГ ЮЗИ

Пирамиданинг ён ёқлари учбурчаклар, асоси эса кўпбурчак бўлиши маълум. Пирамиданинг ён сиртидаги учбурчакларнинг (ён ёқларининг) юзаларининг йиғиндиси унинг сиртининг юзини ифодалайди.

Асоси мунтазам кўпбурчак, ён қирралари тенг бўлган пирамидани кўриб чиқайлик. У мунтазам n бурчакли пирамида деб аталади. Унинг асосининг томонини a, ён ёғининг S учидан туширилган баландлиги ℓ бўлсин. $SE=\ell$; $AB=a$. SE баландлик пирамиданинг **апофемаси** деб аталади (171-расм).

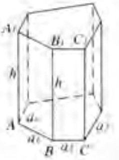
Бу пирамиданинг ён ёғидаги бир учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}a\cdot\ell$ бўлади. Унда унинг ён сиртининг юзи

$$S_{ё.с}=\frac{1}{2}a\cdot n\cdot\ell \qquad \text{ёки} \qquad S_{ё.с}=\frac{1}{2}P\cdot\ell \qquad (3)$$

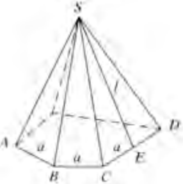
Мунтазам пирамиданинг ён сиртининг юзи асоси периметрининг ярмини унинг апофемасига кўпайтмасига тенг. Пирамида тўлиқ сиртининг юзи ён сирти юзи билан асоси юзининг йиғиндисига тенг.

$$S_{т.с}=S_{ё.с}+S_a \qquad (4)$$

S_a - асосининг юзи, уни ҳисоблаш мумкин.

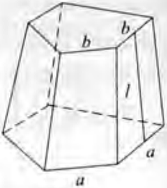


170-расм



171-расм

Кесик *n* бурчакли мунтазам пирамида асосларининг томонлари *a* ва *b*, апофемаси ℓ бўлсин (172-расм). Унинг ён ёқлари тенг трапециялар бўлади. Уларнинг юзларининг йиғиндиси кесик пирамиданинг ён сиртининг юзини ифодалайди. Бир трапециянинг юзи $\frac{a+b}{2}\cdot\ell$ бўлиши маълум.



172-расм

Унда кесик пирамиданинг ён сирти юзи

$$S_{\text{ёс}}=\frac{a+b}{2}\cdot\ell\cdot n \text{ ёки } S_{\text{ёс}}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot\ell \qquad (5)$$

Бу ерда P_1, P_2 - асосларининг периметрлари.

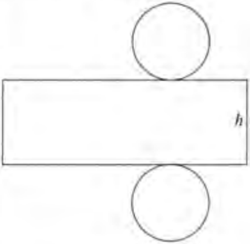
Кесик пирамида асосларининг юзлари S_{1a} ва S_{2a} бўлса, тўлиқ сиртнинг юзи

$$S_{\text{тс}}=S_{\text{ёс}}+S_{1a}+S_{2a} \qquad (6)$$

бўлади.

6.3.3. ЦИЛИНДР СИРТИНИНГ ЮЗИ

Цилиндрнинг асослари тенг доиралар эканлиги сизга маълум. Агар цилиндр сиртини бир ясовчиси бўйича кесиб, унинг ёйилмасини ясасак, унда 173-расмдагидек бўлади. Бунда тўғри тўртбурчак цилиндрнинг ён сирти, доиралар эса унинг асосларини ифодалайди. Цилиндрнинг радиуси *R*, баландлиги *h* бўлса, тўғри тўртбурчакнинг бир томони цилиндр асосининг айланаси узунлигига, иккинчи томони эса унинг баландлигига тенг. Унда тўғри тўртбурчакнинг юзи цилиндрнинг ён сирти юзига тенг:



173-расм

$$S_{\text{ц.ё.с.}} = 2\pi \cdot R \cdot h \qquad (7)$$

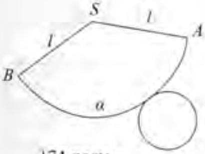
тўлиқ сиртининг юзи эса

$$S_{\text{ц.с}} = S_{\text{ц.ё.с}} + 2S_{a} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi \cdot R^{2} \text{ ёки}$$

$$S_{\text{ц.с}} = 2\pi \cdot R(h + R) \qquad (8)$$

бўлади.

63.4. КОНУС СИРТИНИНГ ЮЗИ



174-расм

Агар конуснинг сирти бир тузувчиси бўйича кесиб олинса, унинг ёйилмасида 174-расмда тасвирланганидай доира сектори ва доира ҳосил бўлади. Конуснинг ясовчиси ℓ, радиуси R бўлсин. $SA=\ell$ - секторнинг радиуси, $\angle ASB = \alpha$ бўлади. Бу ҳолда конус ён сиртининг юзи SAB секторнинг юзига тенг бўлади.

$$S_{\text{к.ё.с}} = S_{\text{сек}} = \frac{\pi\ell^{2}a}{360^{0}} \qquad (9)$$

AB ёйнинг узунлиги $m = \frac{\pi\ell a}{180^{0}}$ бўлиши маълум. Шунинг учун (9) дан

$$S_{\text{к.ё.с}} = \frac{\pi l 2a}{360} = \frac{\pi l}{180^{0}} \cdot \frac{l}{2} = m \cdot \frac{l}{2}, \qquad (10)$$

бироқ, AB ёйнинг узунлиги конус асоси айланасининг узунлигини аниқлайди. Унда $m \approx 2\pi R$ бўлади. Шундай қилиб, конус ён сиртининг юзи

$$S_{\text{ё.с}} \approx 0\pi R\ell \qquad (11)$$

бўлади. Натижада конуснинг тўлиқ сиртининг юзи

$$S_{\text{т.с}} = \pi R\ell + \pi R^{2} \qquad (12)$$

бўлади.

Кесик конус ён сиртининг юзини асослари радиуслари R ва

r, ясовчилари $\ell+\ell_1$ ва ℓ_1 бўлган икки тўлиқ конус ён сиртлари юзларининг айирмаси сифатида топиш мумкин. Натижада кесик конус ён сиртининг юзини ҳисоблашда

$$S_{\text{к.к.ё.с}}=\pi(\mathrm{R}+r)\ell \qquad (13)$$

формуласидан фойдаланиш мумкин, бунда $(R-r)\cdot\ell=\ell\cdot r$ эканлиги маълум. Кесик конус тўлиқ сиртининг юзи

$$S_{\text{т.с}}=\pi(R+r)\ell+\pi R^2+\pi r^2 \qquad (14)$$

формула орқали ифодаланади.

63.5. ШАР СИРТИНИНГ (СФЕРАНИНГ) ЮЗИ

Цилиндрга ёки конусга ўхшатиб, шарнинг (сферанинг) ёйилмасини тузиб бўлмайди. Шунинг учун шарнинг сирти юзини аниқлайдиган формулани топиш қўшимча тушунчаларни талаб қилади. Унга кейинчароқ 11-синфда тўхталамиз. Ҳозирча шарнинг (сферанинг) сирти юзини топишнинг қуйидаги тайёр формуласидан фойдаланамиз:

$$S_{\text{ш.ю}}=4\pi R^2, \qquad (15)$$

бу ерда R -шарнинг радиуси.

МАШҚЛАР

1. Кубнинг қирраси 5 дм. Сиртининг юзини топинг.
2. Кубнинг ён ёғининг диагонали 8 см. Унинг сирти юзини топинг.
3. Кубнинг сирти юзи 54 м^2. Унинг қиррасини ҳисобланг.
4. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг уч ўлчови: 1) 2см, 4см, 8см; 2)1.5дм, 4дм, 4.5дм бўлса, унинг сирти юзини топинг.
5. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг томонлари 5м ва 3м, баландлиги 6.5 м бўлса: 1) ён сиртининг юзини; 2) тўлиқ сирти юзини ҳисобланг.
6. Кубнинг диагонали *d*. Унинг сирти юзини ҳисобланг.
7. Куб сиртининг юзи *S*. 1) Қиррасини; 2) диагоналини топинг.
8. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ён сиртининг юзи 48см^2, баландлиги 4см, асосларининг юзлари 16 см^2 бўлса, унинг асоси томонларини топинг.
9. Бешбурчакли тўғри призма асосининг томонлари 1,5 м, 2,5м, 3м, 1м, 5м, баландлиги 6 дм бўлса, унинг ён сирти юзини топинг.
10. Асоси параллелограмм бўлган тўғри призманинг баландлиги 12дм, асосининг томонлари 6дм ва 4дм.

Параллелограммнинг ўткир бурчаги 30^0. Призманинг: 1) ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзни топинг.

11. Тўғри призманинг асоси ромб, баландлиги 8дм. Ромбнинг диагоналлари 6 дм ва 8 дм. Призманинг: 1) ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзини топинг.

12. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони 12 см, ён қирраси 10 см. Пирамида тўлиқ сирти юзини топинг.

13. Мунтазам учбурчакли пирамида асосининг томони 16 дм, апофемаси 5 дм. Унинг тўлиқ сирти юзини топинг.

14. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томони 3м, апофемаси 4 м. 1) Ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзини топинг.

15. Кесик мунтазам тўртбурчакли пирамида асосларининг томонлари 4см ва 2 см, апофемаси 3см. Пирамиданинг: 1) ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзини топинг.

16. Цилиндрнинг: 1) баландлигини 3 марта орттирсак; 2) асосининг радиусини икки марта орттирсак, унинг ён сирти юзи қандай ўзгаради?

17. Цилиндрнинг: 1) радиуси 1,2дм, баландлиги 2,5дм; 2) диаметри 20см, баландлиги 14см. Тўлиқ сирти юзини топинг.

18. Цилндрнинг ёйилмасидаги доираларнинг ҳар бирининг юзи 25,2 см^2, тўғри тўртбурчакнинг юзи 62,8 см^2. Цилиндрнинг радиуси ва баландлигини топинг.

19. Цилиндрнинг ўқ кесимидаги квадратнинг томони a га тенг бўлса, цилиндр тўлиқ сирти юзини топинг.

20. Агар конуснинг: 1) ясовчисини икки марта орттирсак; 2) радиусини уч марта камайтирсак, унда конуснинг ён сиртининг юзи қандай ўзгаради?

21. Конуснинг ясовчиси ℓ, радиуси R, баландлиги h бўлсин. Агар: 1) $\ell=16$ см, $R=4$см, 2) $\ell=1{,}5$ см, $h=1$ см; 3) $h=24$см, $R=15$ см бўлса, конус сиртининг юзини топинг.

22. Катетлари 0,8 дм, 0,6 дм бўлган тўғри бурчакли учбурчак катта катети атрофида айланади. Айланиш натижасида ҳосил бўлган сирт юзини топинг.

23. Кесик конус асосларининг радиуслари 5 см ва 2 см, ясовчиси 10см, конуснинг: 1) ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзини топинг.

24. Асослари 20 см ва 14 см, баландлиги 4см бўлган тенг ёнли трапеция асосларининг ўртаси орқали ўтувчи ўқнинг атрофида айланади. Айланиш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг: 1) ён сирти юзини; 2) тўлиқ сирти юзини топинг.

25. Шарнинг радиуси: 1) 8см; 2) 5дм бўлса, сирти юзини топинг.

26. Шарларнинг радиуслари 5 см ва 2,5 см бўлса, уларнинг сиртлари юзларининг нисбатини топинг.

27. Ернинг радиуси тахминан 6400 км. Ер сиртининг: 1) юзини ҳисобланг; 2) 30%и қуруқликни ташкил қилса, унинг юзини ҳисобланг.

64-§. ФАЗОВИЙ ЖИСМЛАР ҲАЖМЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Тўғри чизиқда кесманинг узунлиги, текисликда фигуранинг юзи ўлчанганидек, фазода фигуранинг (жисмнинг) ҳажмини ўлчаш мумкин. Ҳажм ҳақидаги тушунчалар ҳам турмушдаги заруриятлар натижасида келиб чиққан (масалан, идишнинг ҳажмини билиш, хона ҳажмини аниқлаш ва бошқалар) жисмнинг ҳажми фазода катталик бўлиб ҳисобланади. Ҳар қандай катталикни таърифлаш учун бирлик танлаб олинади. Шунинг учун ҳажмни ўлчаш учун ҳажм ўлчов бирлигини танлаб олиш керак.

Қиррасининг узунлиги бирлик кесмага тенг бўлган кубни бирлик куб деб атаймиз. Бу бирлик кубнинг ҳажми ҳажм бирлиги қилиб қабул қилинган.

Фазодаги фигуранинг (жисмнинг) ҳажмини топиш учун шу жисмда қанча бирлик куб бор эканлигини аниқлаш керак. У мусбат сон орқали ифодаланади.

Умумий ҳолда фазодаги F фигурага (жисмга) унинг ҳажми деб аталувчи V мусбат сон мос келтирилади ва у қуйидаги хоссаларга эга:

1) Тенг фигураларнинг ҳажмлари тенг.

2) Агар фигура бўлакларга бўлинса, унда унинг ҳажми олинган бўлакларнинг ҳажмлари йиғиндисига тенг.

Ҳажмнинг танлаб олинган бирлигида ҳар қандай жисм учун унинг ҳажми деб аталувчи сонни аниқлаш мумкин. Бу саволга биз 11- синфда кенгроқ тўхталамиз. Оддий жисмларнинг ҳажмини аниқлашнинг тайёр формулалари қуйидагилар.

64.1.ТЎҒРИ ПРИЗМАНИНГ ҲАЖМИ

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми $V = a \cdot b \cdot c$ (1) формуласи билан ифодаланиши сизга 6-синфдан маълум, бунда *a,b, c* унинг уч ўлчови. (1) формулани $V = S \cdot h$ (2) кўринишида ҳам ёзиш мумкин, бу ерда $S = a \cdot b$ параллелепипед асосининг юзи, *h*- баландлик. Параллелепипед призманинг бир тури эканлиги маълум. (2) формула ихтиёрий тўғри призма учун ҳам тўғри бўлади, бунда *S* тўғри призма асосининг юзи бўлади.

Демак, **тўғри призманинг ҳажми унинг асоси юзининг баландлигига кўпайтмасига тенг**.

64.2. ПИРАМИДАНИНГ ҲАЖМИ

Пирамида асосининг юзи S_a, баландлиги h бўлса, унинг ҳажми $V = \frac{1}{3} S_a \cdot h$ (3)

формула бўйича ифодаланади. Демак, пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзининг баландликка кўпайтмасининг учдан бир қисмига тенг. Кесик пирамиданинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2) \quad (4)$$

формула орқали ифодаланади, бунда S_1 ва S_2 - пирамида асосларининг юзлари, h - пирамиданинг баландлиги.

64.3. ЦИЛИНДРНИНГ ҲАЖМИ

Цилиндр асосининг радиуси R бўлса, унда асосининг юзи $S = \pi R^2$ бўлади. Тўғри призманинг ҳажмини аниқлашга ўхшаш, цилиндрнинг ҳажми $V = S \cdot h$ ёки

$$V = \pi R^2 \cdot h \quad (5)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Демак, цилиндрнинг ҳажми унинг асоси юзининг баландликка кўпайтмасига тенг.

64.4. КОНУСНИНГ ҲАЖМИ

Конус асосининг радиуси R, баландлиги h бўлса, унинг асосининг юзи $S = \pi R^2$ (доиранинг юзи) бўлади. Конуснинг ҳажми асоси юзининг баландликка кўпайтмасининг учдан бир қисмига тенг:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \quad (6)$$

Конуснинг ҳажми формуласи пирамиданинг ҳажми формуласига ўхшаш, худди шунга ўхшаш (3) ва (6) формулалар ҳам ўхшаш. Бундай бўлиши бежиз эмас. Чунки, конус асосининг ичига мунтазам кўпбурчак чизиб, унинг учларини конус учи билан туташтирсак, тўғри пирамида ҳосил қилинади ва пирамида томонлари сонини кўпайтирсак, конус пирамидага ўхшаб қолади.

Кесик конуснинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2) \qquad (7)$$

формула ёрдамида топилади, бунда R ва r кесик конус асосларининг радиуслари, h - кесик конуснинг баландлиги. (4) ва (7) формулаларни таққослаб кўринг.

64.5. ШАРНИНГ ҲАЖМИ

Радиуси R га тенг бўлган шарнинг ҳажми $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (8)

формула орқали ҳисобланади.

МАШҚЛАР

1. Кубнинг қирраси 4 см. Ҳажмини топинг.

2. Тўғри тўртбурчакли параллелепипеднинг уч ўлчови берилган: 4 м, 2 м ва 6м. Унинг ҳажмини топинг.

3. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак, баландлиги 9 дм. Агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 6дм ва 8 дм бўлса, призма ҳажмини топинг.

4. Тўғри призманинг асоси томонлари 10 см ва 6 см, орасидаги бурчаги 60^0 бўлган параллелограмм. Призманинг баландлиги 12 см бўлса, унинг ҳажмини топинг.

5. Томони 8 м, ўткир бурчаги 30^0 бўлган ромб тўғри призма асоси бўлиб ҳисобланади. Бу тўғри призманинг ҳажми 128 $м^2$ бўлса, унинг баландлигини топинг.

6. Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томони 6 см, баландлиги 9 см. Пирамида ҳажмини топинг.

7. Асосининг томони 8 дм, баландлиги 12 дм бўлган мунтазам: 1) уч бурчакли; 2) олтибурчакли призманинг ҳажмини топинг.

8. Асосининг томони a, баландлиги h бўлган мунтазам: 1) уч бурчакли; 2) тўрт бурчакли; 3) олтибурчакли пирамида ҳажмини топинг.

9. Томонлари 4м ва 3м бўлган тўғри тўртбурчак пирамиданинг асоси бўлиб ҳисобланади. Пирамиданинг баландлигини топинг.

10. Кесик мунтазам тўртбурчакли пирамида асосларининг томонлари 6 см ва 2 см, баландлиги 15 см. Унинг ҳажмини топинг.

11. Агар цилиндрнинг: 1) баландлиги уч марта орттирилса; 2) радиуси икки марта орттирилса, унинг ҳажми қандай ўзгаради?

12. Цилиндрнинг: 1) радиуси 4 см; баландлиги 5см; 2) диаметри 10 дм, баландлиги 8 дм бўлса, унинг ҳажмини топинг.

13. Цилиндр асосининг айланаси узунлиги C, баландлиги h бўлса, унинг ҳажмини топинг.

14. 13-масаладаги $c=6{,}28$ дм; $h=5$ дм бўлса, цилиндрнинг ҳажмини топинг.

15. Цилиндрнинг радиуси 5 см, ҳажми 628 $см^3$ бўлса, унинг баландлигини топинг.

16. Конуснинг ясовчиси ℓ, радиуси R, баландлиги h бўлсин. Агар: 1) $\ell=1{,}6$ дм; $R=4$ см; 2) $\ell=15$ см; $h=10$ см; 3) $h=2{,}4$ дм; $R=15$ см бўлса, конус ҳажмини топинг.

17. Конуснинг ясовчиси унинг асоси билан 45^0 бурчак ҳосил қилади. Конус радиуси 12 дм бўлса, унинг ҳажмини топинг.

18. Конуснинг радиуси 6 см, ҳажми 376,8 $см^3$ бўлса, конус баландлигини топинг.

19. Кесик конус асосларининг радиуслари 9 см ва 1см, баландлиги 6 см. Кесик конус ҳажмини топинг.

20. Агар шарнинг радиуси: 1) 2,5 см; 2) 8 дм; 3) 1м; 4) 1,5 бўлса, унинг ҳажмини топинг.

21. Шарнинг радиуси уч марта орттирилса, унинг ҳажми қандай ўзгаради?

22. Икки шарнинг радиуслари 6 см ва 3 см бўлса, уларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

ИЛОВА

1. ГЕОМЕТРИЯНИНГ ҚАДИМГИ ТАРИХИ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

Ҳар қандай фаннинг ривожланиш тарихи доимо далиллардан бошланади, бу аниқ далилларнинг тўпланишига мос фаннинг ўзининг қонун ва назариялари ишлаб чиқилади ва анча узоқ вақтдан сўнг қолипга солинган бир системага туширилади. Геометрия ҳам худди шундай йўл билан ўсиб ривожланди.

Геометриянинг пайдо бўлган куни, ойи ёки йилини аниқ кўрсатиб бўлмайди. Чунки геометрия бошқа барча фанлар сингари, одамларнинг турмуш эҳтиёжларидан келиб чиққан. Бу эҳтиёжлар айрим геометрик тушунчалар билан ифодаланган. Бу тушунчалар асрлар давомида тўпланиб, кейин бир қолипга тушиб, системалашган. Энди геометрия мустақил фан бўлиб юзага келгунгача бўлган айрим фактларга тўхталамиз.

Геометриянинг дастлабки элементлари аввал Вавилонда ва Мисрда пайдо бўлган. Мисрликларда геометрия кўпинча ерни ўлчаш асосида келиб чиққан. Бизнинг Миср математикаси билан танишлигимиз эрамизгача 2000-1700 йилларда ёзиб қолдирилган қўлёзмаларга асосланган. Бу қўлёзмаларни, ёдгорликларни ўрганиб чиқилганда мисрликларнинг ўша пайтдаёқ тўғри тўртбурчакнинг, учбурчакнинг, трапециянинг юзларини аниқлашни билишганига ишонамиз. Юз бирлиги учун улар томонининг узунлиги бирга тенг бўлган квадратни олишган. Фигураларнинг ўхшашликлари ҳақида ҳам тушунчаларга эга бўлишган. Фақат бугина эмас, кесик мунтазам пирамида ҳажмини ҳам ҳозиргидек аниқ формула билан аниқлашган. Геометрияни ривожлантиришда вавилонликлар мисрликлардан қолишган эмас. Вавилонликлар геометрик айрим масалаларни алгебра ёрдамида ечишган.

Бироқ Миср иқтисодининг кейинчалик ўсмай орқага кетиши геометриянинг бу ўлкада бундан буён ривожланишига тўсқинлик қилди. Шунинг учун умумий математик маданият маркази секин-аста Мисрдан Грецияга ўта бошлайди. Эрамизгача VII-VI асрларда Грецияда шаҳардаги қурилишларнинг, денгизда сузишнинг ривожланиши астрономиянинг, физиканинг дастлабки тушунчаларининг пайдо бўлиши кузатилади. Бунинг ўзи анча аниқ ўлчовларни талаб қилган. Шунинг учун қийин геометрик масалаларни ечишга тўғри келган.

Бундай масалаларни ечишда олдиндан қўлланиб келинган содда геометрик билимлар камлик қилди. Шунинг учун геометрияни назарий томондан асослаш зарурияти келиб чиқди.

Бу вазифани амалга оширишни Фалес мактаби ўз бўйнига олди. Бу мактаб қадимги грек фанининг ва философиясининг асосчиси Фалес Милетскийнинг (эрамизгача 624-547 й.й.) номи билан боғлиқ. Бу мактабда геометрия асосий изланишлар қаторида турган. Шундай қилиб, геометрия грек философлари томонидан секин-аста фанга айлантирилди, унинг айрим тасдиқлари теорема сифатида логик жиҳатдан исботлана бошлаган. Ҳозир мактаб геометрия курсида исботланиб келаётган айрим теоремалар ўша вақтлардаёқ Фалес томонидан исботланган деб ҳисобланади. Бундай теоремалар қаторига қуйидагилар киради:

1) Ярим айланага ички чизилган бурчак тўғри бурчак бўлади.

2) Вертикал бурчаклар тенг.

3) Тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчаклар тенг.

4) Учбурчак томони ва унга ёпишган икки бурчаги бўйича аниқланади.

Грецияда геометриянинг кейинги ривожланиши Пифагор Самосскийга (эрамизгача 530-500 й.й.) ва унинг мактаби билан чамбарчас боғлиқ. Геометрик ихтироларнинг кўпи Пифагор мактабига тегишли. Аниқроғи:

1) Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси ҳақидаги теорема.

2) Квадрат тенгламани геометрик йўл билан ечиш.

3) Пифагор теоремаси.

Бу мактабда геометрия билан алгебранинг боғлиқлигига эътибор берилган. Пифагор мактабида «ўлчаниши мумкин бўлмаган кесмаларнинг» мавжуд эканлигининг очилиши геометриянинг кейинги ривожланиши учун катта аҳамиятга эга бўлди. Унгача ҳар қандай икки кесманинг нисбати рационал сон билан ифодаланади, деб келинган. Унинг тўғри эмаслиги исботланди. Ихтиёрий кесмани ўлчаш учун рационал сонларнинг етарли эмаслиги аниқланган. Демак, иррационал сон ҳақидаги тушунчага ўтиш зарурияти пайдо бўлган.

Эрамизгача VI-III асрларда грек олимлари Демокритнинг (эрамизгача 460-370 й.й.), Платоннинг (эрамизгача 429-348 й.й.), Аристотелнинг (эрамизгача 384-322 й.й.) геометрияга оид кашфиётлари ҳам геометриянинг бундан нари ривожланиши учун яхшигина шароит тузиб берган. Масалан, пирамиданинг ва конуснинг ҳажмларини аниқлаш Демокрит тарафидан ўша вақтлардаёқ аниқланган.

Ўша кезларда Грецияда математиканинг, хусусан, геометриянинг ривожланишига ўзгача эътибор берилган.

Қолаверса, философияни ўрганиш учун биринчи навбатда геометрияни билиш керак, деб ҳисобланган. Масалан, Платон тарафидан уюштирилган Академияга «геометрияни билмаган одам кирмай қўяверсин», деган гап халқ орасида тарқаб кетган.

Шундай қилиб, Грецияда геометриянинг ривожланиши философия билан чамбарчас боғлиқ бўлган. Бунинг натижасида геометрия грекларнинг философия мактабларида юқори босқичга кўтарилган. Натижада эрамизгача VII-III асрларда Грецияда геометрия бўйича кўп масалалар йиғилган. Бу йиғилган материалларни аниқ бир илмий принцип асосида бир системага жойлаштириш зарурияти келиб чиққан.

Бу зарурият тахминан эрамиздан аввал III асрда грек олими Евклид томонидан амалга оширилган. Унинг «Бошланиш» деб аталган китоби (тўплами) 13 қисмдан иборат бўлиб, геометриянинг кўп саволларини ўз ичига олган.

Биз юқорида геометриянинг қадимги тарихига қисқача тўхталиб ўтдик. Унинг умумий тарихи жуда кенг маълумотлардан иборат ва кўп изланишларни талаб қилади. Геометриянинг ҳозиргидай юқори даражадаги тарихи кимни ҳам қизиқтирмайди. Уларнинг айримларига кейинчароқ тўхталиб ўтамиз.

2. ЦИРКУЛЬ ВА ЧИЗҒИЧ ЁРДАМИ БИЛАН ЯСАШ (ЕЧИШ) МУМКИН БЎЛМАЙДИГАН АЙРИМ МАСАЛАЛАР

Циркуль ва чизғич ёрдамида ечиш мумкин бўлмаган қадимги «машҳур» уч масалага тўхталиб ўтамиз.

а) Кубни иккилантириш масаласи

Бу қадимги масалалардан бири. Унинг келиб чиқиши қуйидаги содда масалага боғлиқ бўлиши эҳтимол: юзи берилган квадратнинг юзидан икки марта катта бўлган квадратни ясанг. Бу масалани циркуль ва чизғич ёрдамида ечиш мумкинлиги маълум.Берилган квадрат узунлиги a, изланаётган квадрат томонининг узунлигини x деб белгиласак: унда масала шарти бўйича $x^2 = 2a^2$ ёки $x = a\sqrt{2}$ бўлади. Бундай кесмани ясаш учун катетларининг узунликлари a га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясасак, унда унинг гипотенузасининг узунлиги x бўлади, демак, изланаётган квадратнинг томони аниқланади. Энди ўша топилган томони бўйича квадратни ясаш маълум.

Шунга ўхшаш, олимлар кубни икки марта каттайтириш масаласини ҳам циркуль ва чизғич ёрдамида ечишга ҳаракат қилишган. Бироқ, уни узоқ вақт давомида еча олмаганлар. Шунинг учун бу масала ўта муҳим муаммоли масалалардан бири бўлиб қолган. Кубни икки марта орттириш масаласи қуйидагича:

Қиррасининг узунлиги a га тенг бўлган куб берилган. Ҳажми шу куб ҳажмидан икки марта катта бўлган кубнинг қиррасини ясаш талаб қилинди. Изланаётган куб қиррасининг узунлигини x орқали белгиласак, унда масаланинг шарти бўйича $x^3 = 2a^3$ бўлади (бунда a^3 - берилган кубнинг, x^3 изланаётган кубнинг ҳажми). $a = 1$ деб олайлик. Унда юқоридаги тенгликдан қуйидаги тенгламани оламиз:

$$x^3-2=0 \qquad (1)$$

Агар (1) тенглама илдизларини циркулй ва чизғич ёрдамида ясаш мумкин бўлса, унда бу қуролларни қўлланиб изланаётган қиррани ясаш мумкин бўлар эди.

Бироқ, (1) тенглама рационал илдизга эга эмас. Шундай қилиб, берилган масалани циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш (ечиш) мумкин эмас.

б) Бурчакни тенг уч бўлакка бўлиш

Масаланинг шарти қуйидагича: ҳар қандай бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида тенг учта бўлакка бўлинг.

Бу масала ҳам қадимги масалалардан бири. У қадимги Грецияда эрамиздан аввалги V асрда пайдо бўлган. Ҳар қандай бурчакни циркулй ва чизғич ёрдамида доим тенг иккига бўлиш мумкин. Бир вақтнинг ўзида «нима учун циркуль ва чизғич ёрдамида ҳар қандай бурчакни тенг уч бўлакка бўлиш мумкин эмас?» - деган савол туғилади.

Унинг устига бу масаланинг амалий аҳамияти ҳам катта. У айланани тенг бўлакларга бўлиш билан ҳам боғлиқ. Бунда масаланинг умумий ҳолда ечилиши талаб қилинади. Чунки айрим ҳолларда, масалан, 90^0 ёки 180^0 каби бурчакни уч бўлакка бўлиш осон. Бироқ, ҳар қандай бурчакни циркулй ва чизғич ёрдамида уч бўлакка бўлиш мумкин эмас эканлигини исботлаш учун тенг уч бўлакка бўлиш мумкин бўлмаган бир бурчакнинг бор эканлигини кўрсатиш етарли бўлади.

Берилган бурчакнинг катталигини α билан белгилаб, уни ўткир бурчак деб ҳисоблайлик. Агар у ўтмас бурчак бўлса, унда уни $\alpha = 180^0 - \beta$ кўринишда ёзиш мумкин, бунда β ўткир бурчак бўлиб қолади.

$$\frac{\alpha}{3} = 60^0 - \frac{\beta}{3}$$

кўринишида ёзиш мумкин бўлганлиги сабабли, α ни уч бўлакка бўлишни, b ни тенг уч бўлакка бўлишга келтирилади. Чунки, 60^0 бурчакни доимо ясаш мумкин. Шунинг учун масалани ўткир бурчак учун қараш етарли бўлади. Изланаётган ўткир бурчакнинг катталигини φ орқали белгилайлик. Унда масаланинг шарти бўйича $\varphi = \frac{\alpha}{3}$ бўлади.

Агар маркази координаталар бошида бўлган ва радиуси бирга тенг бўлган айлана берилса, унда айланада ётган нуқтанинг абсциссаси (α - ўткир бурчак бўлганда у мусбат қийматга эга) бурчакнинг косинусини аниқлаши маълум, шунинг учун бурчакнинг косинусини кесмани ясаш билан боғлаймиз. Бизга маълум бўлган формула бўйича $\cos\alpha = \cos 3\varphi$ ёки $\cos\alpha = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ бўлади (бу формула алгебра курсидан сизларга маълум).

Бундан $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - \cos a = 0$ тенглигига эга бўламиз.

$\cos\varphi = \frac{x}{2}$; $\cos\alpha = \frac{b}{2}$ деб белгиласак,

$$x^3 - 3x - b = 0 \qquad (2)$$

тенгламаси ҳосил бўлади. (2)нинг рационал илдизи бўлса, x ни ясаш мумкин. Демак, φ ҳам ясалади. $0^0 < \alpha < 90^0$ бўлганда (2)нинг рационал ечими бўлмайди. Масалан, $a = 60^0$ десак, $\cos\alpha = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$. Унда юқоридаги белгилаш бўйича $b = 1$ бўлади. Натижада $x^3 - 3x - 1 = 0$. Бу тенгламанинг рационал ечими йўқ.

Демак, бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида тенг учта бўлакка бўлиш мумкин эмас.

Шундай қилиб, умумий ҳолда циркуль ва чизғич ёрдамида бу масалани ҳам ечиб бўлмайди.

в) Доирани квадратга келтириш.

Бу қадимги «машҳур» масалаларнинг учинчиси. Буни барча математик масалаларнинг энг биринчиси десак янглишмаймиз, чунки у тахминан тўрт минг йил аввал пайдо бўлган. Бу масалани ечишга греклар, вавилонликлар, мисрликлар ва ҳиндистонликлар кўп марта ҳаракат қилишган.

Масала қуйидагича берилади: циркуль ва чизғич ёрдамида юзи берилган доира юзига тенг бўлган квадрат ясанг.

Берилган доиранинг радиуси узунлигини R деб, изланаётган квадрат томонини x билан белгилайлик. Унда доиранинг юзи πR^2, квадратнинг юзи эса x^2 бўлади. Масала шарти бўйича $x^2 = \pi R^2$ ёки $x = R\sqrt{\pi}$.

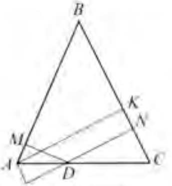
Юқорида эслатганимиздек, агар квадратнинг томонини ясаш мумкин бўлса, унда квадратни доимо ясай оламиз. Уни ясаш сизга маълум. Бироқ, бунда квадратнинг томонини ясаш $\sqrt{\pi}$ сонига (ёки π га) боғлиқ. Агар π қандайдир мусбат бутун ёки рационал сон бўлса, унда биз x кесмани осонгина ясаб олган бўлар эдик. Бироқ, π рационал сон эмас. Демак, $x = R\sqrt{\pi}$ кесмани, ёки $R = 1$ десак, AK кесмани циркуль ёки чизғич ёрдамида ясаш мумкин эмас. Шунинг учун юзи берилган айлана юзига тенг квадратни ясаш масаласини циркуль ва чизғич ёрдамида ечиб бўлмайди.

3. ИСБОТ ҚИЛИШГА ВА ЯСАШГА ДОИР БЕРИЛГАН АЙРИМ МАСАЛАЛАРНИНГ ЧИЛИШИ

1. Тенг ёнли учбурчак асосининг ихтиёрий нуқтасидан унинг ён томонларигача бўлган оралиқларнинг йиғиндиси учбурчакнинг ён томонига туширилган баландликка тенг эканлигини исбот қилинг.

Исбот. Бу тасдиқнинг тўғрилигини аввал учбурчакнинг учидаги бурчаги ўткир бурчак бўлган ҳол учун исботлайлик. Масала шартига тўғри келувчи учбурчак ABC бўлсин (175-расм).

$AB = BC$ бўлсин, AC асосининг ихтиёрий нуқтаси D ни олиб, ундан учбурчакнинг ён томонларига DM ва DN перпендикулярларни туширамиз: $DM \perp AB$, $DN \perp BC$, BC томонига AK



175-расм

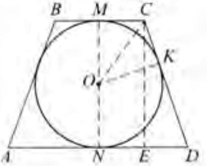
баландликни тушурамиз: $AK \perp BC$. Демак $AK \| DN$, чунки улар фақат биргина BC томонга тушурилган перпендикуляр.

ND ни D нуқтадан нари чўзамизда A нуқта орқали BC томонга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, унинг ND кесмасининг давоми бўлган кесишган нуқтани P орқали белгилаймиз. Натижада ADP тўғри бурчакли учбурчакка эга бўламиз. AMD ва APD тўғри бурчакли учбурчаклари ўзаро тенг, чунки уларнинг гипотенузалари умумий (AD), $\angle MAD = \angle DAP$ (буларнинг ҳар бири тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчаклар, чунки $\angle BCA = \angle DAP$, булар параллел BC ва AP тўғри чизиқлари билан кесишишгандаги ички алмашинувчи бурчаклар бўлишади. Бу учбурчакларнинг тенглигидан $DM=DP$, параллел AP ва BC тўғри чизиқларнинг орасидаги перпендикуляр бўлганлиги сабабли $AK=PN$; $PN=PD+DN=DM+DN$ Демак, $AK=DM+DN$ жанлиги исбот қилинди.

Берилган тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги тўғри бурчак бўлганда AK баландлик AB томонига мос келади, B бурчаги ўтмас бурчак бўлганда, AK баландлиги учбурчакнинг ташқарисида CB томонининг давомига тушади.

2. Тенг ёнли трапецияга доир ички чизилган. Доира юзининг трапеция юзига нисбати доира айланаси узунлигининг трапеция периметрига нисбатига тенг эканлигини исботланг.

Исбот. $ABCD$ тенг ёнли трапецияга доира ички чизилган дейлик (176-расм). Ички чизилган доиранинг радиуси $OM = r$ бўлсин. Кўп масалаларни ечишда керакли элементларни ўз ҳолича алоҳида топишга ҳаракат қилиш ҳеч бир натижа бермайди, бундай вақтда изланаётган элементларнинг бир нечтасининг ёки алгебрик йиғиндисини, ёки кўпайтмасининг ёки нисбатини топиш масала ечилишини енгиллатади. Шунга ўхшаш



176-расм

масалаларнинг бири ҳозирги олган масаламиз бўлиб ҳисобланади.Бундай масалани ечишда биз трапециянинг ҳеч бўлмаганда бир томонини (масалан, BC ни) ички чизилган доира радиуси орқали ($OM = R$) ифодалаб олишга ҳаракат қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, улар доирага ташқи чизилган тўртбурчак томонларининг хоссасига асосан $AD + BC = AB + CD$ бўлишдан ва трапеция тенг ёнли бўлганлиги сабабли $AD + BC = 2AB$ бўлиши бундан $AB = \frac{AD + BC}{2}$, ёки трапециянинг ён томони, унинг ўрта чизиғига тенглигини аниқлаймиз. Бундан нари, OCD учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини асослаб, ундан $OK = \sqrt{CK \cdot KD}$, ёки $r = \sqrt{CK \cdot KD}$ эканлигини аниқлаб, CED тўғри бурчакли учбурчакданми ёки бошқа кўз қарашларданми, иш қилиб трапециянинг бир томони чизилган айлананинг радиуси орқали ифодалашга бекорга овора бўлмасдан, масала талабига жавоб берувчи нисбатларни тўғридан тўғри топишга ўтиш керак. Шундай қилиб, бизнинг белгилашлар ва юқорида келтирилган тушунчалар бўйича:

доиранинг юзи πr^2 га,

трапециянинг юзи $MN \cdot CD = 2rCD$ га,

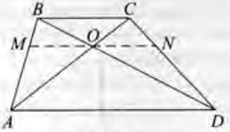
айлана узунлиги $2\pi r$ га

трапеция периметри $2CD + BC + AD = 4CD$ га тенг.

Демак, $\frac{\pi r^2}{2r \cdot DC} = \frac{2\pi r}{4CD}$ бунда $\frac{\pi r}{2 \cdot DC} = \frac{\pi r}{2 \cdot CD}$ ўз-ўзидан келиб чиқади.

3. Трапеция диагоналлари кесишган нуқтада унинг асосларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқнинг трапеция ён томонлари орасидаги қисми, диагоналлар кесишган нуқтада тенг иккига бўлинишини исбот қилинг.

Исбот. Агар берилган трапеция тенг ёнли бўлса, унда масаланинг ечилиши ўз-ўзидан тушунарли. Шунинг учун биз тасдиқнинг тўғрилигини ҳар қандай трапеция учун исботлаймиз. Берилган трапеция $ABCD$ бўлсин (177-расм). BD ва AC диагоналлари кесишган нуқтани O орқали, трапеция асосларига параллел қилиб MN тўғри чизиқни ўтказайлик.

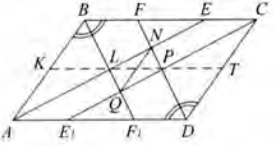


177-расм

MO=ON эканлигини исбот қилиш учун *AOM* ва *ABC* учбурчаклар ўхшашлигидан $\frac{OM}{BC}=\frac{AO}{AC}$, бундан $OM = BC\cdot\frac{AO}{AC}$ ни; *OND* ва *BCD* учбурчаклар ўхшашлигидан: $\frac{ON}{BC}=\frac{OD}{BD}$, бундан $ON = BC\cdot\frac{OD}{BD}$ ни топамиз. Учтадан бурчаклари тенг бўлганлигидан *BOC* ва *AOD* учбурчаклари ҳам ўхшаш. Демак, $\frac{AO}{OC}=\frac{OD}{BO}$, бундан $\frac{AO}{AO+OC}=\frac{OD}{OD+BC}$ ёки $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, биз $OM = BC\cdot\frac{AO}{AC}$; $ON = BC\cdot\frac{OD}{BD}$; $\frac{AO}{AC}=\frac{OD}{BD}$ эканлигига эга бўламиз. Бу тенгликларни таққослаб *OM=ON* натижага келамиз.

4. Параллелограммнинг ички бурчаклари биссектрисаларининг кесишишидан тўғри бурчак ҳосил бўлишини ва бу бурчакнинг диоганали параллелограммнинг қўшни томонларининг айримасига тенг бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Берилган параллелеграмм *ABCD* бўлсин дейлик. (178-расм), унинг ички бурчаклари биссектрисаларини ўтказамиз, уларнинг кесишишидан LNPQ тўрт бурчак ҳосил бўлади. Бунда параллелограммнинг қарама-қарши бурчакларининг биссектрисалари ўзаро параллел бўлади, ёки AE ∥ CE_1, DF∥ BF_1.



178-расм

Параллелограммнинг бир томонига тегишли бурчаклар бўлганлиги сабабли

$\angle A + \angle B = 2d$, демак $\angle BAL + \angle LBA = d$. Шунинг учун.
$\angle ALB = \angle QLN = d$, ёки $LNPQ$ тўғри тўртбурчак.

ABMва BMEтўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан (чунки уларнинг BL-катети умумий ва биттадан ўткир бурчаги тенг) $AB=BE$ эканлиги, ёки ABE учбурчаги (худди шундай CDE, учбурчаги ҳам) тенг ёнли эканлиги келиб чиқади. Демак $AL=LE$ (шунга ўхшаш $CP=PE_1$). $AECE_1$ параллелограммнинг томонлари бўлганлиги сабабли $AE=CE_1$ эканлигини ҳисобга олиб $AL=LE=E_1P=PC$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак биттадан ўткир бурчаклари (LAF_1 ва PE_1D) ва биттадан катетлари (AL ва E_1P) тенг бўлганлиги сабабли LAF_1 ва PE_1D тўғри бурчакли учбурчаклар ўзаро тенг бўлишади. Бу учбурчакларнинг иккаласининг ҳам гипотенузаси AD тўғри чизиғида ётганлиги учун уларнинг гипотенузаларига туширилувчи баландликлари ҳам ўзаро тенг бўлади, ёки L ва P нуқталари AD дан бир хил узоқликда ётади демак, $LP \parallel AD$ бўлади.

ABE учбурчакнинг ўрта чизиғи $KL = \frac{1}{2}BE$, E_1CD

учбурчакнинг ўрта чизиғи $PT = \frac{1}{2}E_1D$.

$$LP = KT - (KL + PT) = AD - \left(\frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}E_1D\right) = AD - \left(\frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}BE\right) ,$$

чунки $BE=E_1D$.

$LP = AD - BE = AD - AB$, чунки $AB=BE$. Шундай қилиб, тўғри тўртбурчакнинг диагонали параллелограммнинг қўшни томонларининг айирмасига тенг эканлиги исбот қилинди.

5. Тўғри бурчакли учбурчак томонларига ўхшаш томонлари учбурчакнинг томонлари қилиб, ўхшаш кўпбурчак ясалган. Гипотенозага ясалган кўпбурчакнинг юзи катетларга ясалган кўпбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг эканлигини исбот қилинг.

Исбот. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларига ўзаро ўхшаш қандайдир бир кўпбурчаклар тузилди дейлик

(179-расм). Гипотенузага ясалган кўпбурчак юзини S_c деб, a ва b катетларига ясалган кўпбурчакларнинг юзларини S_a ва S_b деб белгилаймиз.

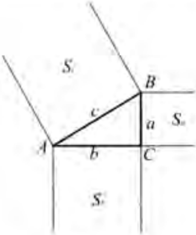
Ўхшаш кўпбурчакларнинг юзлари уларнинг ўхшаш томонлари квадратлари нисбатларига тенглигидан.

$$\frac{S_a}{S_c}=\frac{a^2}{c^2};\ \frac{S_b}{S_c}=\frac{b^2}{c^2};\ \frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2};$$

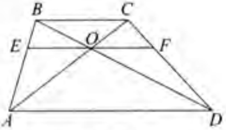
$$\frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{c^2};\ \frac{S_a+S_b}{S_c}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

Бундан $S_a+S_b=S_c$.

6. $ABCD$ трапеция диагоналларининг кесишган нуқтаси орқали унинг асосларига EF параллел тўғри чизиқ ўтказилган. EF тўғри чизиқ асосларнинг ўртача гармоник қийматига (EF га тескари катталик) асосларининг тескари катталикларининг ўрта арифметик қийматига тенг, ёки $\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)$ бўлишини исбот қилинг (180-расм).



179-расм



180-расм

Исбот. ABC ва AOE учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{BC}{EO}=\frac{AB}{AE}$; ABD ва BOE учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{EO}$. Бу пропорциялардан

$$\frac{EO}{BC}+\frac{OE}{AD}=\frac{AE}{AB}+\frac{BE}{AB};\ OE\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=\frac{AE+EB}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

OFD ва BCD учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{OF}{BC}=\frac{FD}{CD}$.

COF ва ACD учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{OF}{AD}=\frac{CF}{CD}$.

Бу пропорциялардан ҳадма-ҳад қўшиб

$$\frac{OF}{BC}+\frac{OF}{AD}=\frac{FD}{CD}+\frac{CF}{CD};\ OF\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=\frac{DF+FC}{CD}=\frac{DC}{CD}=1$$

$$OE\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)+OF\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)=2$$

$\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)(OE+OF)=2;\ \left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right)\cdot EF=2$ бундан

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{AD}\right).$$

7. Параллелограмм ташқи бурчаклари биссектрисалари кесишишидан диагонали параллелограммнинг қўшни томонларининг йиғиндисига тенг бўлган тўғри тўртбурчак ҳосил бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Аввал $ABCD$ параллелограммнинг ташқи бурчаклари биссектрисаларининг кесишишидан ҳосил бўлган $MNPQ$ тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак эканлигини кўрсатишга ҳаракат қилиб кўрайлик (181-расм).

BT ва CL параллел тўғри чизиқларнинг BC тўғри чизиқ билан кесишгандаги бир томонли бурчаклар бўлганлиги сабабли $\angle TBC+\angle LCB=180^0$, $\frac{1}{2}\angle TBC+\frac{1}{2}\angle LCB=90^0$ ёки

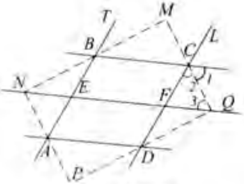
$\angle MBC + \angle MCB = 90^0$, демак $BMC = 90^0$. шунга ўхшаш $MNPQ$ тўртбурчакнинг қолган N, P ва Q бурчакларининг ҳар бири ҳам тўғри бурчак эканлигини исбот қилиш мумкин. Бунинг ўзи $MNPQ$ - тўғритўртбурчак эканлигини кўрсатади.

Энди бу тўртбурчакнинг NQ диагоналини ўтказиб, унинг AB ва CD томонлари билан кесишган нуқталарни E ва F орқали белгилаймиз. CQ ташқи бурчакнинг биссектрисаси бўлганлиги сабабли $\angle 1 = \angle 2$, параллел тўғри чизиқларнинг учинчи бир тўғри чизиқ билан кесишгандаги ички алмашинувчи бурчаклар бўлганлиги сабабли $\angle 1 = \angle 3$, демак $\angle 2 = \angle 3$, ёки FCQ тенг ёнли учбурчак: $FC=FQ$. Шунга ўхшаш йўл билан FDQ учбурчакнинг ҳам тенг ёнли эканлигини, ёки $FQ=FD$ эканлигини исботлаш мумкин. Шундай қилиб биз охирги икки тенгликдан $FQ = \frac{1}{2}CD$ эканлигига эга бўламиз. Яна худди шу йўл билан $EN = \frac{1}{2}AB$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

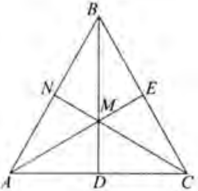
Натижада $MNPQ$ тўғритўртбурчакнинг диагонали

$$NQ = NE + EF + FQ = \frac{1}{2}AB + BC + \frac{1}{2}AB = AB + BC$$

эканлиги келиб чиқади.



181-расм



182-расм

8. Тенг томонли учбурчакнинг ичида ётган қандайдир M нуқтадан унинг томонларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси доимий ва у учбурчакнинг баландлигига тенг эканлигини исбот қилинг.

Исбот. *ABC* тенг томонли учбурчакнинг *M* нуқтасидан унинг томонларига *MD, ME* ва *MN* перпендикулярларни ўтказиб, *M* нуқтани учбурчакнинг учлари билан туташтирамиз (182-расм). Натижада *ABC* учбурчаги учта учбурчакка бўлинади. Унинг юзи берилган учбурчакнинг юзлари йиғиндисига тенг. Демак:

$$S_{ABC}=S_{AMC}+S_{CMB}+S_{BMA}=\frac{1}{2}DM\cdot AC+\frac{1}{2}EM\cdot BC+\frac{1}{2}NM\cdot AB$$

Учбурчак тенг томонли: *AB=AC=BC* бўлганлиги сабабли

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\left(DM+EM+NM\right)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h,$$

ёки $DM+EM+NM=h$ уч бурчакнинг баландлиги. Охирги тенгликдаги уч кесманинг йиғиндиси *M* нуқтасининг учбурчакнинг қайси жойидан олинганига қарамасдан доим ўзгармас бўлади, чунки учбурчакнинг юзи доимий.

9. Параллелограммнинг ичидан олинган нуқта унинг барча учлари билан туташтирилган. Мана шундан пайдо бўлган қарама-қарши учбурчаклар юзларининг йиғиндиси ўзаро тенг бўлишини исбот қилинг.

Исбот. *ABCD* параллелограммнинг ичида *O* нуқтани оламиз, уни параллелограммнинг учлари билан туташтирамиз (183-расм). *BOC* ва унга қарама-қарши *AOD* учбурчак юзларининг йиғиндисини топайлик.

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OM;\quad S_{AOD}=\frac{1}{2}AD\cdot ON$$

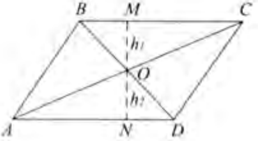
$$S_{BOC}+S_{AOD}=\frac{1}{2}AD\left(OM+ON\right)=\frac{1}{2}AD\cdot MN=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

AOB ва *DOC* учбурчаклари юзларининг йиғиндиси ҳам параллелограмм юзини ярмига тенг бўлишини кўрсатса бўлади.

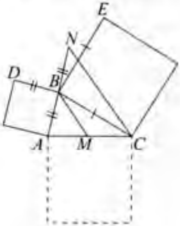
Шунинг учун $S_{BOC}+S_{AOD}=S_{AOB}+S_{DOC}$ эканлиги келиб чиқади.

10. Учбурчак томонларига квадратлар тузилган. Квадратларнинг учбурчакни бир учидан чиқувчи томонларини туташтирувчи кесма учбурчакнинг шу учидан ўтказилган медианасидан икки марта катта бўлишини исбот қилинг.

Исбот. ABC учбурчакнинг томонларига квадратлар ясаб AB томоннинг N нуқтасигача $BN=AB$ кесмага туташтириб, B учидан AC томонига BM медианани ўтказамиз (184-расм). Бундан $MA=MC$ бўлганлиги сабабли ANC учбурчакнинг ўрта чизиғи $BM=\frac{1}{2}NC$, $\angle DEB=\angle BNC$ чунки $DB=BN$ $\angle DBE=\angle NBC=90^0+\angle NBE$. Демак, $DE=NC$, шунинг учун $BM=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}DE$. $DE=2BM$. Худди шунга ўхшаш A ва C учларидан чиқувчи квадратларнинг томонлари учларини бириктирувчи кесмаларнинг ҳар бирининг тегишли медианадан икки марта катта бўлишини ҳам исбот қилиш мумкин.



183-расм



184-расм

11. Ҳар қандай учбурчакда қандайдир бир бурчагининг биссектрисаси ўша учи орқали ўтказилган унинг медианаси ва баландлиги орасида бўлишини исботланг.

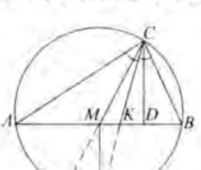
Исбот. 1-усул. Берилган ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана чизамиз. C учидан учбурчакнинг CD баландлигини, CM медианасини ва CK биссектрисасини ўтказамиз (185-расм). CK биссектрисани айлана билан кесишгунча чўзамиз, унда $\angle ACK=\angle NCB$ бўлганлиги сабабли $AN=NB$ бўлади. N нуқтани медиананинг асоси бўлган M нуқта билан туташтирамиз. $AM=MB$, $AN=NB$ бўлганлиги сабабли $MN\perp AB$. CN ётиқ чизиқнинг (биссектрисанинг) учларининг AB тўғри чизиқдаги проекцияси M ва D (медиана асоси билан баландликнинг асоси) ABC тенг ёнли учбурчак бўладиган ёлғиз бир ҳолатдан бошқа барча ҳолларда тенг. K нуқтанинг икки томонида бўлади. Агар ABC тенг ёнли учбурчак бўлиб қолса, унда M, K ва D нуқталар бир-бирига устма-уст тушади.

2-усул. D, K ва M нуқталар ABC учбурчакнинг B бурчагининг учи орқали ўтказилган баландликнинг, биссектрисанинг ва медиананинг асослари бўлсин (186-расм). Агарда $AB=BC$ бўлса, унда D, K, M нуқталар устма-уст тушиб қолади. $AB < BC$ бўлсин, унда $\angle A > \angle C$ (чунки катта томон қаршисида катта бурчак ётади).

Демак, $\angle ABD < \angle DBC$, чунки ABD ва DBC тўғри бурчакли учбурчакларнинг ҳар биридаги ўткир бурчакларнинг йиғиндиси доимий ва $\angle BAD > \angle BCD$. Шундай қилиб, $\angle ABD < \angle DBC$, унда $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD$. Демак, $\angle ABD < \frac{1}{2}\angle ABC$ ёки $\angle ABD < \angle ABK$ ва D нуқта AK кесмада ётади. Бурчак биссектрисасининг хоссасига асосан $AK{:}KC=AB{:}BC$, тахмин бўйича $AB < BC$ бўлганлиги сабабли охирги тенгликдан $AK < KC$ эканлиги келиб чиқади. Бундан $\angle AK < \frac{1}{2}\angle AC = AM$ бўлишига эга бўламиз, демак M нуқта KC кесмада ётади.

Шундай қилиб, K нуқта D ва M нуқталарнинг орасида ётиши исбот қилинди.

12. Ҳар қандай учбурчакда унинг медианалари кесишган



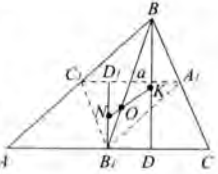
185-расм

186-расм

нуқта, ўрта маркази (баландликлар кесишган нуқта) ва ташқи чизилган айлананинг маркази бир тўғри чизиқда эйлер тўғри изиғи деб аталувчи тўғри чизиқда) ётишини исботланг.

Исбот. ABC учбурчак томонларининг ўрталарини туташтириб $A_1B_1C_1$ учбурчакка эга бўламиз (187-расм). Тегишли томонлари пропорционал бўлганлиги сабабли ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклари ўзаро ўхшаш, уларнинг ўхшашлик коэффициенти 0,5 га тенг. ABC учбурчак медианалари кесишган O нуқта $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг медианалари кесишган нуқта бўлади, бошқача айтганда $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг медианалари ABC учбурчак медианаларининг бўлаклари бўлиб ҳисобланади, чунки $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг, масалан A_1 учидан ўтказилган медианасини олиб кўрсак, у сўзсиз AA_1 медианасининг бўлагини ташкил қилади (ҳақиқатдан ҳам $AC_1A_1B_1$ параллелограмм бўлганлиги сабабли унинг A_1A ва C_1B_1 диоганаллари $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг C_1B_1 томонининг тенг ўртасида кесишади). $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг қолган C_1 ва B_1 учларидан чиқувчи медианалари ҳам ABC учбурчагининг C ва B учлари орқали ўтказилган медианаларининг бўлакларини тузишини худди шу йўл билан кўрсатиш мумкин.

ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг ўхшаш томонлари тенг ўрталаридан ўша томонларга тушурилган перпендикуляр $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг баландликлари бўлади, бошқача айтганда ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг ўрта маркази бўлади, уни N деб белгилаймиз. N ва О нуқталари орқали ўтказилган тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг баландликлари кесишган К нуқтаси орқали ҳам ўтишини кўрсатиш керак.



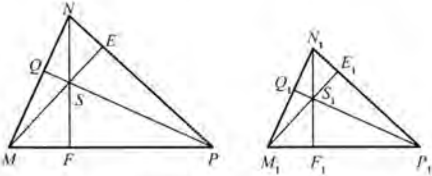
187-расм

ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг ўхшашлик коэффициенти 0.5 га тенг бўлганлиги сабабли: 1) уларнинг ўхшаш томонларига тушурилган баландликларининг нисбати:

$B_1D_1 : BD = 0,5$ ва 2) $B_1O_1 : BB_1 = 0,5$ бўлади. Бу охирги икки тенгликнинг асосида учбурчакларнинг ўхшашлигини ҳисобга олиб $B_1N_1 : BK = 0,5$ ва $B_1O_1 : BO = 0,5$ деган ҳулосага келамиз. Ҳақиқатдан ҳам, агар берилган икки учбурчак ўхшаш бўлса, унда уларнинг, масалан, ўхшаш баландликларигина эмас, ўша ўхшаш баландликларининг мос кесмалари (масалан, баландликларнинг ўрта марказдан учигача бўлган кесмалар) ҳам учбурчак томонлари сингари нисбатда бўлтшини кўриш мумкин. Масалан, агар MNP учбурчак $M_1N_1P_1$ учбурчакка ўхшаш бўлса (188-расм) унда уларнинг ўхшаш томонларининг пропорционаллигидан ва бурчакларнинг тенглигидан фойдаланиб, уларнинг ҳар бирини, маслан, учала баландликларини чизиш натижасида ҳосил бўлган учбурчакларнинг ҳам ўхшаш бўлишини (масалан: MQP ва $M_1Q_1P_1$, MEP ва $M_1E_1P_1$, MSP ва $M_1S_1P_1$ ва яна бошқа учбурчаклар) кўрсатиш мумкин. Ўша ҳосил бўлган учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$MP : S_1P_1 = SF : S_1F_1 = SM : S_1M_1 = ... = MP : M_1P_1$ эканлигига эга бўламиз.

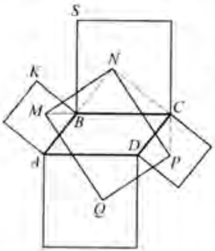
Ўхшаш учбурчакларнинг баландликларинигина эмас медианаларининг ва биссектрисаларининг мос кесмаларининг нисбати ҳақида ҳам шундай фикр юргизиш мумкин.



188-расм

Шундай қилиб, юқоридаги асосий масаламиз учун чизилган чизма бўйича $B_1N = \frac{1}{2}BK$ ва $B_1O = \frac{1}{2}BO$ эканлигини кўрдик. Бундан ташқари $B_1D_1 \| BD$ бўлганлиги сабабли $\angle NB_lO = \angle OBK$, демак, $\Delta B_1NO \sim \Delta OBK$, бундан $\Delta NOB_1 = \angle BOK$ эканлиги, ёки NO билан OK бир тўғри чизиқда ётиши келиб чиқади. Шундай қилиб, биз ҳар қандай ABC учбурчакда унинг медианаларининг кесилиш нуқтаси (O), ўрта маркази (K) ва томонларининг тенг ўрталаридан ўтказилган перпендикулярнинг кесишиш нуқтаси (N) бир тўғри чизиқда ётишни исботладик.

13. Праллелограмм томонларига унинг ташқарисида тузилган квадратларнинг марказлари квадратнинг учлари бўлиши исботланг.



189-расм

Исбот. ABCD параллелограмм томонларига квадратлар ясаймиз (189-расм). Бу квадратларнинг марказларини туташтириш натижасида ҳосил бўлган MNPO тўртбурчакнинг квадрат бўлишини исботлаш учун аввал унинг томонларининг тенглигини, сўнг унинг бурчакларининг тўғри бурчак эканликларини кўрсатиш етарли бўлади. Параллелограммнинг масалан, B ва C учларининг ҳар бирини мос квадратларнинг марказлари билан туташтириб MBN ва NCP учбурчакларига эга бўламиз. Бу учбурчаклар ўзаро тенг, чунки $BM = CP, BN = CN$ ва $\angle MBN = \angle NCP$ (чунки $\angle MBN = \angle MBK + \angle SBN + \angle KBS = 90^0 + \angle KBS$.

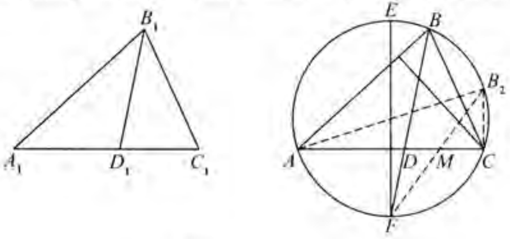
шунга ўхшаш $\angle NCP = 90^0 + \angle DCB$, бироқ тегишли томонлари ўзаро перпендикуляр бўлганлиги сабабли $\angle KBS = \angle DCB$). MBN ва DCB учбурчакларининг тенглигидан

$MN = NP$ эканлиги келиб чиқади. Шунга ўхшаш $PQ = QM = MN$ эканлигини ҳам кўрсатиш мумкин, ёки тўртбурчак томонларининг тенг эканлиги исботланди. MBN ва NPC учбурчакларнинг тенглигидан $\angle MNB = \angle PNC$ эканлиги келиб чиқади. $\angle BNC = 90^0$ ва $\angle MNB = \angle PNC$ бўлганлиги сабабли $\angle MNP = 90^0$, ёки тўртбурчакнинг бурчаги тўғри бўлади. Барча томонлари тенг бўлганлиги сабабли $MNPQ$ - параллелограмм, бир бурчаги тўғри бўлганлиги сабабли у квадрат бўлади.

14. Агар учбурчакнинг икки биссектрисаси ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.

Бу масалани ечиш учун аввал қўшимча қуйидаги масалани ечишга тўғри келади. «Агар берилган ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг асослари учидаги бурчаклари ва у бурчакларининг биссектрисалари ўзаро тенг бўлишса $(AC = A_1C_1, \angle B = \angle B_1, BD = B_1D_1)$, унда бу учбурчакларнинг ўзлари ҳам тенг бўлади (190-расм).

Исбот. ABC учбурчакка ташқи чизилган айлана чизамиз ва унинг AC томонига перпендикуляр қилиб EF диаметрни ясаймиз. $A_1B_1C_1$ учбурчакни ABC учбурчак устига уларнинг тенг асослари ва тенг бурчаклари ўзаро мос келадиган қилиб қўямиз. Бу ҳолда учбурчакларнинг тенг биссектрисалари ва уларнинг ўзлари ҳам тўлиқ бир-бирига устма-уст тушади. Бу хулосанинг



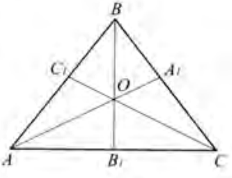
190-расм

тўғрилигини тескари усул билан исботлаймиз, ёки B_1 учи B учига устма уст тушмайди, бошқа B_2 ҳолатида бажарилади, деб тахмин қилайлик. Масала шарти бўйича $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, бизнинг тахмин бўйича $\angle A_1B_1C_1 = AB_2C$ бўлганлиги сабабли B_2 нуқта айланада ётади ётади. B_1D_1 биссектрисаси B_2Mга ўтсин F нуқта AC ёнинг ўртаси бўлганлиги сабабли AC ёйга тиралувчи ички чизилган B ва B_2 бурчаклар иккаласининг ҳам биссектрисаларининг (BD билан B_2Mнинг) давомлари F нуқта орқали ўтади.

$FCB > FCB_2$ бўлсин дейлик, унда $FB > FB_2$ ва $FD < FM$ (чунки AC тўғри чизиқдаги FDнинг проекциси FMнинг проекциясидан кичик). Демак, $BD = BF - FD > B_2F - FM = B_2M = B_2D_1, BD > B_1D_1$.

Бу натижа масала шартига ($BD=B_1D_1$) тўғри келмайди. Демак, B_1 учи B учига устма-уст тушмайди деб тахмин қилиш мумкин эмас, улар сўзсиз устма-уст тушади. Шунинг учун $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ келиб чиқади.

Энди асосий масаланинг ечилишига ўтайлик. ABC берилган учбурчак бўлсин (191-расм). Унинг A ва C бурчакларининг AA_1 ва CC_1 биссектрисаларини ўтказайлик. Улар $AA_1=CC_1$ бўлсин. B бурчакнинг BB_1 биссектрисасини ясаймиз. Унда юқорида исбот қилинган маълумот бўйича $\Delta AA_1B = \Delta CC_1B$, чунки уларнинг асослари тенг ($AA_1=CC_1$) учидаги бурчаклари тенг (B умумий бурчак). Бу учбурчакларнинг тенглигидан AB=BC, ёки ABC учбурчакнинг тенг ёнли учбурчак эканлиги келиб чиқади.

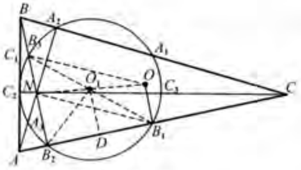


191-расм

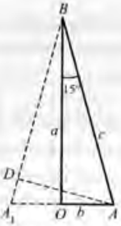
15. Ҳар қандай учбурчакда унинг учала томонларининг ўрталари, учала баландликларининг асослари ва

баландликларининг ўрта марказдан бошлаб учларигача бўлган кесмаларини тенг иккига бўлувчи учта нуқта бир айланада ётишини исботланг (бундай айлана тўққиз нуқтанинг айланаси деб аталади).

Исбот. Берилган ABC учбурчакка ташқи чизилувчи айлананинг марказини топиш мақсадида аввал учбурчакнинг учала томонининг тенг ўрталаридан ўша томонларига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишидан O нуқтани топамиз (192-расм). Ундан сўнг учбурчакнинг ўрта марказини (баландликлари кесишган нуқтани) топиб, уни N орқали белгилаймиз. Эйлернинг тўғри чизиғи деб аталувчи тўғри чизиқ ҳақидаги юқорида чиқарилган масаланинг ечилишида кўрсатилган каби B_1 учбурчакнинг AC томонининг қоқ ўртаси ва BB_2 - учбурчакнинг AC томонига тушурилган баландлик бўлса, унда $B_1O \parallel NB$ ва $B_1O = \frac{1}{2} NB$ эканлигини кўриш мумкин. NB кесманинг қоқ ўртасини B_2 деб белгилайлик, унда $OB_1 = NB_2$ бўлади. Шундай қилиб, $OB_1 \parallel NB_3$ ва $OB_1 = NB_2$ бўлганлиги сабабли OB_1NB_3 тўртбурчак параллелограмм бўлади, демак, агар унинг диогоналларининг кесишган нуқтасини O_1 деб белгиласак, унда $B_3O_1 = B_1O_1$ ва $NO_1 = O_1O$ бўлади. $OB_1 \parallel B_2N$ бўлганлиги сабабли B_2NOB_1 тўрт бурчак трапеция бўлади. Демак, $O_1D \perp AC$ ва $NO_1 = O_1O$ бўлганлиги сабабли O_1D - трапециянинг ўрта чизиғи бўлади.



192 - расм.



193 - расм.

Бошқача айтганда $B_2D=DB_1$. Шундай қилиб, катетлари тенг бўлганлиги сабабли $\Delta B_2O_1D = \Delta B_1O_1D_1$ бундан $O_1B_1 = O_1B_2$ эканлиги келиб чиқади. $B_3O_1 = O_1B_1$ эканлиги аввал кўрсатилган. Демак, $B_3O_1 = O_1B_1 = O_1B_2$, ёки B_1, B_2 ва B_3 нуқталарнинг ҳар бири (учбурчак томонининг қоқ ўртаси, баландлигининг асоси ва ўрта марказидан учигача бўлган баландлик кесмасининг қоқ ўртаси) O_1 нуқтадан бир хил узоқликда бўлади. Шунинг учун O_1 марказ билан B_1,B_2,B_3 нуқталари орқали айлана чизиш мумкин. Қолган икки нуқтанинг (A_1,A_2,A_3, C_1, C_2,C_3) ҳар бири мос ҳолда шу айланада ётишини шу усул билан исботлаш мумкин.

Эслатма: ONB учбурчакда $NO_1 = O_1O$ ва $NB_3=B_3B$ бўлганлиги сабабли O_1B_3 кесма шу учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади, демак $O_1B_3 = \frac{1}{2}OB$, бошқача айтганда тўққиз нуқтанинг айланаси деб аталувчи айлананинг радиуси (O_1B_3) берилган учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг (O_1B) ярмига тенг.

16. Ўткир бурчаги 15^0 бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларининг кўпайтмаси унинг гипотенузаси ярмининг квадратига тенг эканлигини исботланг.

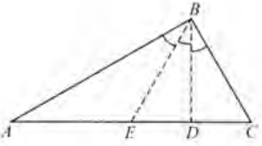
Исбот. Катетлари a ва b, гипотенузаси C бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакни олиб (193-расм), бунда $ab=\left(\frac{c}{2}\right)^2$ эканлигини исбот қилиш учун бу учбурчакнинг ўзига тенг бўлган A_1BC учбурчак қўшиб A_1BA тенг ёнли учбурчакка эга бўламиз. Бунда $\angle A_1BA=30^0$, чунки $\angle CBA=15^0$, эканлиги масала шартида берилган. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонига AD баландлик тушириб $S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1B\cdot AD=\frac{1}{2}c\cdot\frac{c}{2}=\frac{c^2}{4}$ эканлигига эга бўламиз, чунки $A_1B=c$, $AD=\frac{c}{2}$. Иккинчи томондан олганда худди ўша учбурчакнинг юзи

$$S_{A_1BA}=\frac{1}{2}A_1A\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot a=ab \qquad (2)$$

Шундай қилиб, (1) ва (2) тенгликлардан $ab=\frac{c^2}{4}$ эканлиги келиб чиқади.

17. Агар учбурчакнинг бир учидан ўтказилган медианаси билан баландлиги, унинг ўша учидаги бурчагини, учта тенг бўлакларга бўлса, унда бу учбурчак тўғри бурчакли учбурчак бўлишини исбот қилинг.

Исбот. ABC учбурчакнинг AC томонига BE медианани (AE=EC) ва BD баландлигини ($BD\perp AC$) ўтказамиз (194-расм). Масала шарти бўйича $\angle ABE=\angle EBD=\angle DBC$. E B C учбурчакда BD - баландлик ҳам биссектриса ҳам бўлганлигидан тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан ED=D эканлиги келиб чиқади.



194-расм

AE=EC=2ED=2DC. ABD учбурчакнинг BE биссектрисасининг хоссаси бўйича AB:BD=AE:ED=2ED: ED=2:1=2. Демак, AB=2BD, ABD учбурчак тўғри бурчакли учбурчак ва AB=2BD, демак $\angle BAD = 30^0$ ва $\angle ABD = 60^0$, BE кесма ABD бурчакнинг биссектрисаси бўлишидан $\angle ABE = \angle EBD = 30^0$, демак $\angle DBC = 30^0$, ёки $\angle ABC = 90^0$ бўлади.

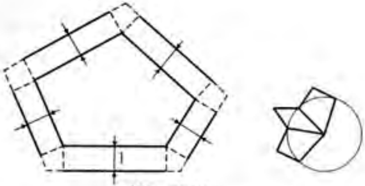
18. Периметри 12 бирликка тенг бўлган қавариқ кўпбурчакнинг барча томонлари ўзаро параллел бўйича кўпбурчак чегараси ташқарига бўйлаб бир бирликка жилдирилади. Бу ҳолда кўпбурчакнинг юзи энг камида 15 бирликка ортишини исботланг.

Исбот. Берилган кўпбурчак ташқарисини бўйлаб унинг томонларининг ҳар бирини ўз ўзига параллел қилиб, жилдирайлик, бунда томонлари ички ва ташқи ўхшаш икки беш бурчакнинг томонлари билан чегараланган ҳалқа ҳосил бўлади (195-расм).

Мана шу ҳалқанинг юзи 15 бирликдан кам эмаслигини исботлашимиз керак.

Бу ҳалқанинг юзи баландлиги 1га тенг бўлган асосларининг умумий узунлиги 12 бирликка тенг бўлган тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисидан (демак 12 бирликдан) ва кўпбурчак бурчакларидаги тўрт бурчакларнинг юзлари йиғиндисидан иборат. Бу кичкина тўртбурчакларнинг барчасини бир учга 0 нуқта айланасига бириктириб жилдирсак, улар ўзаро қандайдир бир кўпбурчакни тузишади. Бу кўпбурчакнинг юзи 0 марказли радиуси 1 бирликка тенг бўлган айланадан катта бўлади. Радиуси 1 бўлган айлана юзи $\pi r^2=\pi=3{,}14$.

Демак, ҳалқа юзи 12+3,14=15,14. 15 бирликдан катта, бошқача айтганда периметри 12 бўлган қавариқ кўпбурчак томонларининг ҳар бирини ўз-ўзига параллел қилиб кўпбурчак ташқарисини бўйлаб жилдирганда унинг юзи энг камида 15 бирликка ортади.



195 - расм.

19. ABCD қавариқ тўртбурчакнинг AB ва CD томонларининг ҳар бири учтадан тенг бўлакларга бўлинган (196-расм). CM=MN=ND, AD=PQ=QB. MNPQ тўртбурчак юзининг $\frac{1}{3}$ қисимини ташкил қилишини исботланг.

Исбот. Учлари умумий, бироқ бирининг асоси иккинчисининг асосидан уч марта кичик бўлганлиги сабабли:

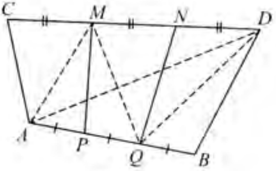
$S_{ACM}=\frac{1}{3}S_{ACD}$ ва

$S_{BQD}=\frac{1}{3}S_{ABD}$,

$S_{ABD}=S_{ABD}+S_{ACD}$,

демак

$S_{ADQ}=\frac{2}{3}S_{BDA}$ $S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ACD}$



196-расм

Бу оҳирги тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак

$S_{ADQ}+S_{AMD}=\frac{2}{3}(S_{DBA}+S_{ACD})$,

$S_{AMD}=\frac{2}{3}S_{ABDC}$

$S_{PMQ}=\frac{1}{2}S_{AMQ}$ $S_{MQN}=\frac{1}{2}=S_{MNPQ}$

Бу охирги тенгликларни ҳам ҳадма-ҳад қўшсак

$$S_{PMQ} + S_{MQN} = S_{MNPQ}$$

ва

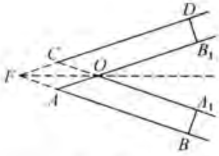
$$\frac{1}{2}S_{AMQ} + \frac{1}{2}S_{MQD} = \frac{1}{2}\left(S_{AMQ} + S_{MQD}\right) = \frac{1}{2}S_{AMDQ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ABDC} = \frac{1}{3}S_{ABDC}$$

бўлганлиги сабабли, $S_{MNQP} = \frac{1}{3}S_{ABDC}$ эканлиги келиб чиқади.

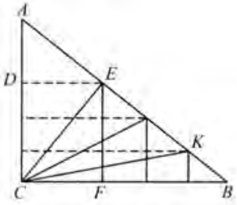
20. Учи қоғоз варақнинг ташқарисида ётган бурчак биссектрисасини ясанг.

Ечиш. Масалани ечиш учун бурчакнинг AB томонининг ихтиёрий нуқтасидан унинг CD томонига параллел қилиб AB_1 тўғри чизиқни ўтказамиз (197-расм).

CD томонининг ихтиёрий D нуқтасидан AB_1га перпендикуляр қилиб DB_1 кесмани ясаймиз. AB томонининг ихтиёрий B нуқтасидан ABга перпендикуляр бўлган $BA_1 = DB_1$ кесмани ўлчаб қўйиб A_1 нуқта орқали A_1Bга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз, бу перпендикуляр тўғри чизиқнинг AB_1 билан кесишишидан ҳосил бўлган O бурчакнинг биссектрисаси берилган бурчакнинг ҳам биссектрисаси бўлади, чунки COAF тўрт бурчак ромб бўлиб ҳисобланади.



197-расм.



198-расм.

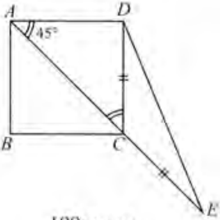
21. Берилган тўғри бурчакли учбурчакка учи тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги билан устма-уст тушадиган қилиб,

диагонали энг кичик бўлган, ички чизилган тўғри-тўрт бурчакни қандай қилиб, чизиш мумкин?

Ечиш. Тўғри бурчакли ABC учбурчакка бир нечта ички чизилган тўғри тўрт бурчакларни чизамиз (198-расм). Бу тўғри тўртбурчакларнинг ичидан диаганали энг кичиги керак. C учидан ўтувчи бундай тўғри бурчакларнинг диаганаллари AB гипотенузага ўтказилган кесмалар бўлади. Албатта, кесмаларнинг энг кичиги C учидан ABга туширилган перпендикуляр бўлиб ҳисобланади. Шунинг учун изланаётган ички чизилган тўғри тўртбурчакни чизиш учун аввал $CE \perp AB$ ни ўтказиб, E нуқта орқали учбурчакнинг катетларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Мана шундан пайдо бўлган DEFC изланаётган тўғри тўртбурчак бўлади, чунки унинг диагонали CE (перпендикуляр) ҳар қандай тўғри тўртбурчак диаоналидан (оғмадан) кичик.

22. Диаганали билан томонининг йиғиндиси бўйича квадрат ясанг.

Ечиш. Масала ечилди деб хисоблайлик, бошқача айтганда изланаётган квадрат ABCD бўлсин дейлик (199-расм). AC диаганал давомига квадрат томонини ўлчаб қўямиз (CE=CD)да, хосил бўлган E нуқтани D учи билан туташтирамиз. CDE - тенг ёнли учбурчакнинг ташқи бурчаги $ACD=45^0$ бўлганлиги сабабли, унинг асосидаги бурчакларининг ҳар бири $\angle DEC = \angle EDC = 22^0 30'$ бўлади. Бунда AE=AC+CD. Шундай қилиб берилган масалани ечишнинг қуйидаги режасини тузиш мумкинчилигига эга бўламиз.

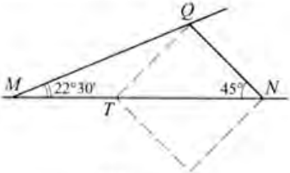


199-расм

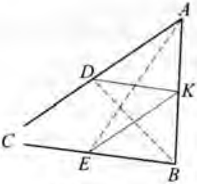
Ихтиёрий олинган тўғри чизиқнинг устига изланаётган квадрат диагонали билан томонининг йиғиндисига тенг бўлган кесмани ўлчаб қўйиб мос ҳолда кесмага ёндош ётган бурчакларнинг бири $22^0 30'$ иккинчиси 45^0 бўладиган қилиб MNQ учбурчакни ясаймиз (199^{a} - расм). Шунинг учун учбурчакнинг $22^{0}30'$ ўткир бурчагига қарама-қарши ётган QN томони изланаётган квадрат томони бўлиб ҳисобланади. Ёки Q нуқтадан NQ га перпендикуляр қилиб QTни ясаймиз. Ҳосил бўлган QTN тўғри бурчакли учбурчакнинг квадратгача тўлдириб, изланаётган квадратга эга бўламиз.

23. С учи чизмага сиғмай қолган АВС учбурчакнинг А ва В учларидан тушган медианаларини ясанг (200-расм).

Ечиш. АВ томонни К нуқта билан тенг иккига бўламиз (АК=КВ). К нуқта орқали ВС томонга параллел қилиб KD тўғри чизиқни, АС томонга параллел қилиб КЕ тўғри чизиқни ўтказамиз. Бунда D ва Е нуқталар учбурчакнинг АС ва ВС томонларининг қоқ ўрталари бўлади. Демак, АЕ ва BD учбурчакнинг медианалари бўлади.



199^{a} - расм.



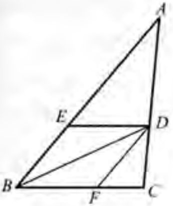
200- расм.

24. Берилган АВС учбурчакка АВС бурчаги умумий бўлган ички чизилган ромбни ясанг (201-расм).

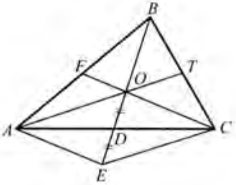
Ечиш. АВС бурчакнинг BD биссектрисасини ўтказиб D нуқта орқали ВСга параллел бўлган DЕни, АВга параллел бўлган DFнa ўтказамиз. Натижада изланаётган DEBF ромбга эга бўламиз, чунки ясаш бўйича бу тўртбурчак параллелограмм ва унинг диагонали қарама-қарши бурчакларнинг биссектрисалари бўлиб ҳисобланади.

25. Уч медианаси бўйича учбурчак ясанг.

Ечиш. Масалани ечиш учун аввал унинг шарти бўйича қуйидагича мулоҳаза юргизиб кўрайлик. Учбурчак ясалади деб ҳисоблайлик, бу учбурчак ABC бўлсин (202-расм). Бу учбурчак медианаларидан бирини, масалан, BD кесмани унинг

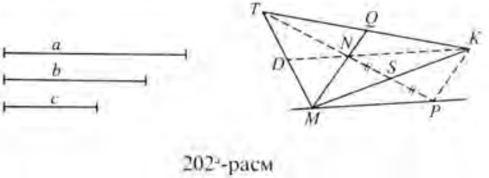


201- расм.



202 - расм.

узунлигининг $\frac{1}{3}$ га чўзиб, ҳосил бўлган E нуқтани A ва C учлари билан кесмалар орқали туташтирамиз. AD=DC ва OD=DE бўлганлиги сабабли AOCE тўртбурчак диаганаллари кесишган нуқтада тенг иккига бўлинувчи тўртбурчак, бошқача айтганда, параллелограмм, бўлади. Шунинг учун $AE = OC = \frac{2}{3}CF$ бўлади. AOE учбурчакнинг ҳар бир томони изланаётган учбурчакнинг медианалари бирининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг эканлиги кўриниб турибди. Бундан қуйидаги ясаш келиб чиқади. Масалан бизга учбурчакнинг уч медианаси (a,b,c - кесмалар) берилди дейлик (202^a - расм).



202^a-расм

Томонлари мос ҳолда ўша медианаларнинг $\frac{2}{3}$ дан бўлакларига тенг бўлувчи MNP учбурчакни унинг уч томони бўйича ясаймиз: $MP=\frac{2}{3}a$; $MN=\frac{2}{3}c$; $PN=\frac{2}{3}b$, MN кесмани $NQ=\frac{1}{3}c$ кесмагача чўзамиз. PN кесмани S нуқтада тенг иккига бўлиб, S нуқтадан ST=b кесмани PN йўналишида ўлчаб қўямиз. T ва Q нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказиб унга QK=TQ кесмани ўлчаб қўямиз. M нуқтани T ва K нуқталар билан кесмалар орқали туташтириб, натижада MTK учбурчакка эга бўламиз. Ҳақиқатдан ҳам: ясаш бўйича бу учбурчакнинг бир медианаси ST=b, иккинчи медианаси

$$MQ=MN+NQ=\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}c=c,$$

учинчи медианаси $KD=KN+ND=MP+ND=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a=a$

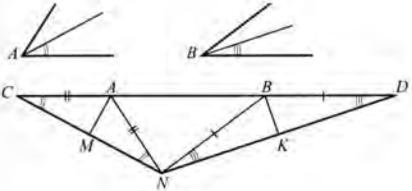
26. Берилган периметри ва асосидаги икки бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

Ечиш. Масала шартини қисқача анализ қилиб чиқиш мақсадида аввал бу масалани ечилди деб, ёки учбурчак ясалади деб тахмин қиламиз. Агар бу учбурчакнинг асосини унинг ён томонларига тенг бўлган кесмаларга иккала томонини ҳам чўзсак ва ҳосил бўлган нуқталарни учбурчакни учи билан туташтирсак, унда берилган масаланинг ечилиши асоси изланаётган учбурчак периметрига, энди асосидаги бурчаклари эса ўша изланаётган учбурчакнинг асосидаги бурчакларнинг яримларига тенг бўлувчи, CDN учбурчакни ясашга тўғри келади (203 - расм) чунки CA+AB+BD=2p, AC=AN, BN=BD,

$$\angle ACN=\angle ANC=\frac{1}{2}\angle BAN=\frac{1}{2}\angle A$$

$$\angle BND=\angle BDN=\frac{1}{2}\angle ABN=\frac{1}{2}\angle B$$

CM=MN, NK=KD, бўлганлиги сабабли берилган масалани ечишнинг қуйидаги режасини тузиш мумкин.



203-расм

Берилган асоси (2р) ва ўша асосидаги бурчаклари ($\frac{1}{2}\angle A$ ва $\frac{1}{2}\angle B$) бўйича учбурчак ясаймиз (CDN). Бу учбурчакнинг ён томонларининг ўрталаридан уларга перпендикулярларнинг учбурчак асоси (CD) билан кесишган нуқталари изланаётган учбурчакнинг қолган икки учи (A ва B учлари) бўлади.

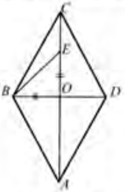
27. Диагонали билан асосининг орасидаги бурчаги ва диагоналларининг йиғиндиси бўйича ромб тузинг.

Ечиш. Масала шартини қуйидагича анализ қиламиз. Изланаётган ромб ABCD бўлсин дейлик (204 - расм). Унда AC+BD=a, $\angle BAC=\alpha$ бўлсин. O нуқтадан бошлаб OСнинг устига OB кесмани ўлчаб қўямиз, унда

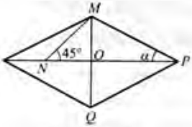
$$AE = AO + OE = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{1}{2}a;$$

$\angle BEO = 45^0$ бўлади. Демак, BAE учбурчакнинг AE асоси берилган кесманинг ярмига тенг, асосидаги бурчаги 45^0, иккинчи бурчаги эса α бурчакка тенг, BO ўша асосга тушурилган учбурчакнинг баландлиги, у ромбнинг кичик диагонали ярмига тенг. Шунинг учун изланаётган ромбни ясаш учун аввал асоси берилган кесманинг ярмига (изланаётган ромб диагоналлари йиғиндисининг ярмига тенг бўлган, асосидаги бурчакларининг бири 45^0, иккинчиси берилган бурчакка тенг қандайдир бир MNP учбурчакни ясаймиз (205-расм).

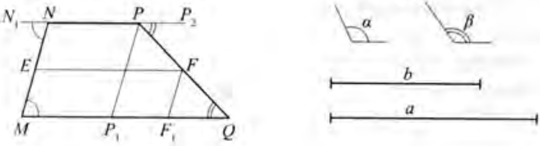
Бунда унинг асоси $NP = \frac{1}{2}a$ асосидаги $\angle MNP = 45^0$, $\angle NPM = \alpha$. M учининг NP асосига баландлик тушурамиз, унинг асоси O изланаётган ромбнинг маркази бўлади. MO ромб диоганалларининг ярми бўлади. MОни O нуқтадан нари ўзининг узунлигига чўзамиз. MPQ учбурчакни MQга солиштириш симметрик холда ромбгача тўлдирамиз.



204-расм.



205-расм.



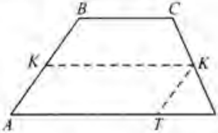
206-расм.

28. Берилган катта асоси, ўрта чизиғи ва кичик асосидаги бурчаклари бўйича трапеция ясанг.

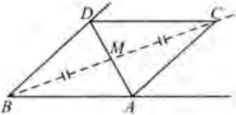
Ечиш. Изланаётган трапеция MNPQ бўлсин (206-расм) унда унинг MQ=a асоси, EF=b ўрта чизиғи ва $\angle MNP = \alpha$, $\angle NPQ = \beta$ бурчаклари аниқ бўлади. $\angle N'NM = \angle NMQ = 180^0 - \alpha$, $\angle P_2PQ \angle PQM = 180^0 - \beta$; FF_1Q учбурчакда $F_1Q=MQ-EF=a-b$, $\angle FF_1Q = 180^0 - \alpha, \angle FQF_1 = 180^0 - \beta$. Шундай қилиб, ясашнинг қуйидаги режаси келиб чиқади.

Аввал DKT учбурчакни ясаймиз (TD=a-b, $\angle T=180^0-\alpha\angle D=180^0-\beta$).

D нуқтадан бошлаб T ни кўзлаб DTнинг устига DA=a ни ўлчаб қўямиз ва A нуқта орқали TKга параллел бўлган ABни ўтказамиз. DK томонининг давомига KC=KD кесмани ўлчаб қўямиз (206ᵃ-расм) C нуқта орқали DAга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, у AB билан B нуқтада кесишади, натижада ABCD трапеция келиб чиқади. Бунинг ўзи изланаётган трапеция бўлади, чунки ясаш бўйича унинг катта асоси DA=a, ўрта чизиғи $KK_1=b$, $\angle B=\alpha\angle C=\beta$.



206ᵃ-расм.



207 - расм.

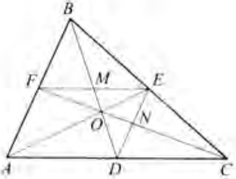
29. Қандайдир бурчак ичида M нуқта берилган. Бурчак томонлари орасидаги кесма M нуқтада тенг иккига бўлинадиган қилиб, M нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказинг.

Ечиш. Берилган B бурчак ичида ихтиёрий M нуқтани олиб, уни бурчак учи билан тўғри чизиқ орқали туташтирамиз (207-расм).

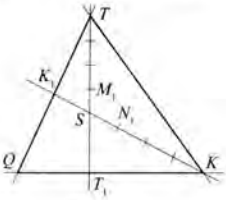
BM тўғри чизиқ учтига M нуқтадан бошлаб MC=MB кесмани ўлчаб қўямиз. C нуқта орқали бурчак томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Хосил бўлган ACDB параллелограммнинг AD диагонали изланаётган тўғри чизиқнинг кесмаси бўлади, чунки DM=MA

30. Берилган оғирлик маркази (медианалар кесишган нуқта) ва иккита ўрта чизиғининг ўртадаги нуқталари бўйича учбурчак ясанг.

Ечиш. Масала ечилди, унинг шартини қаноатлантируви учбурчак ABC бўлсин дейлик (208-расм). Учбурчакнинг оғирлик маркази унинг медианаларини 1:2 нисбатда бўлганлиги сабабли, масалан, OD:OB=1:2 бўлади. Учбурчакнинг ўрта изиғи бўлса, медианани тенг иккига бўлади (бунга учбурчакнинг ўрта чизиқларининг ёрдами билан тузилган AFED ва ECDF параллелограммлардан осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин). Шунинг учун BM=MD ва FN=NC бўлади. $BM=\frac{1}{2}BD,\ OD=\frac{1}{3}BD$ бўлганлиги сабабли $OM=MD-OD=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{3}BD=\frac{1}{6}BD$, демак OM кесма BD кесманинг $\frac{1}{6}$ қисмини, ODнинг $\frac{1}{2}$ қисмини ташкил қилади. Шунга ўхшаш ON кесма ҳам FC медиананинг $\frac{1}{6}$ қисмини, NCнинг $\frac{1}{3}$ қисмини ва OFнинг $\frac{1}{2}$ қисмини ташкил қилишини кўриш мумкин. Бундан ташқари, ҳар қандай учбурчакда унинг оғирлик маркази ва икки ўрта чизиғининг ўрталари бир тўғри чизиқда ётмаслигини кўрамиз. Шунинг учун, айтилганларнинг асосида масалани ечишнинг қуйидаги режасини тузиш мумкин.



208-расм



209-расм

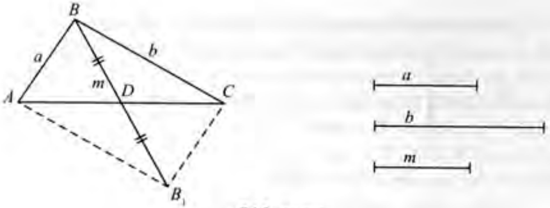
Бир тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий уч нуқта оламиз, уларнинг бири (S нуқта) изланаётган учбурчакнинг оғирлик маркази; қолган иккитаси (M_1 ва N_1) худди шу учбурчак ўрта чизиқларининг ўрталари бўлсин (209-расм). M_1 ва S нуқталари орқали ўтувчи тўғри изиқнинг устига M_1дан бошлаб SM_1 йўналиши бўйича $M_1T=3SM_1$ кесмани ўлчаб қўямиз. M_1дан бошлаб M_1S йўналиши бўйича $M_1T_1=M_1T$ни ўлчаб қўямиз.

Шунга ўхшаш S ва N_1 нуқталар орқали тўғри чизиқ чизиб, унинг устига SN_1 йўналишда N_1дан бошлаб $N_1K_1=3SN_1$ кесмани ўлчаб қўйиб, ундан кейин N_1S йўналишида N_1дан бошлаб$N_1K_1=N_1K$ кесмани ўлчаб қўямиз. K_1 ва T нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказиб, унинг устига TK_1 йўналишида K_1 дан бошлаб $K_1Q=KT$ кесмани ўлчаб қўямиз. Ҳосил бўлган T_1K ва Q нуқталар изланаётган учбурчакнинг учлари бўлади.

31. Бир учидан чиқувчи икки томони ва медианаси бўйича учбурчак ясанг.

Ечиш. Изланаётган учбурчак ABC бўлсин дейлик (210-расм), ёки учбурчакнинг AB,BC томонлари ва BD медианаси берилган кесмаларга (a,b,m)тенг бўлсин. BD медианани D нуқтадан нари чўзиб, унинг устига $DB_1=DB$ кесмани ўлчаб қўямиз. B_1 нуқтани A ва C нуқталар билан туташтириб, диагоналлари кесишган нуқтада тенг иккига бўлинадиган $ABCB_1$ (AD=DC, чунки BD - медиана, $DB=DB_1$ ясаш бўйича) тўртбурчакка эга бўламиз. Демак, $ABCB_1$ тўртбурчак параллелограмм бўлади, шунинг учун $AB=CB_1$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, томонларининг тенглигидан $\Delta ABB_1 = \Delta BB_1C$ бўлади. Бундан изланаётган учбурчакни ясашнинг қуйидаги режасини тузиш мумкин. Берилган учта томони ABB_1 учбурчакка тенг бўлган учбурчакни ясаймиз.

Иҳтиёрий олинган тўғри чизиққа берилган медианадан икки марта катта бўлган кесмани (MN=2m) ўлчаб қўямиз (210-расм) M нуқтани марказ қилиб *a* радиусли, N нуқтани марказ қилиб *b* радиусли айланалар ўтказиб, улар кесишган нуқтани E деб белгилаймиз. E нуқта билан MNнинг ўртаси бўлган O нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказиб, *EO*нинг давомида *O*нуқтадан нари $OE_1=OE$ кесмани ўлчаб қўямиз ва $MENE_1$ параллелограммга эга бўламиз. Бундаги MEE_1 ёки NEE_1 учбурчакларнинг ихтиёрий биттаси изланаётган учбурчакни беради.



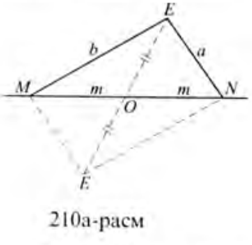
210-расм

32. Контструктив масала. Тенг ёнли ABC учбурчак берилган, унинг AB ва AC томонлари тенг. Бундан ташқари қуйидаги уч маълумот аниқ.

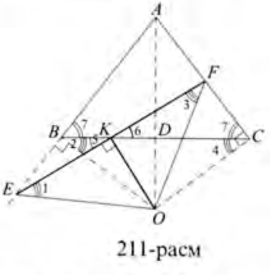
1) BC кесманинг ўртаси D, AD тўғри чизиқдан, OB ва AB тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлгандай қилиб, O нуқта танлаб олинган.

2) BC кесмадан иҳтиёрий K нуқта B ва C нуқталардан фарқли.

3) E нуқта AB тўғри чизиқда, F нуқта AC тўғри чизиқда ётади, бундаги E, K ва F нуқталар бир тўғри чизиқда ётган турли нуқталар. KE=KF бўлганда ва ўша ҳолдагина OK ва EF тўғри чизиқлари ўзаро перпендикулр бўлишини исботланг.



210а-расм



211-расм

Ечиш. Масала шартига мос келадиган қилиб чизмани изайлик (211-расм). Бунда AB=AC, BD=DC.

$\angle ABD = \angle ACD = \angle 7; OB \perp AB$

1) $OK \perp EF$ бўлсин ва EK=KF бўлишини исботлаймиз. Масала шартидан $\alpha = OB$ ва $OC \perp AC$ эканлиги келиб чиқади.

OKE ва OBE тўғри бурчакли учбурчакларни қараб қарайлик OE - уларнинг умумий гипотенузаси. Уларнинг ҳар бирига диаметри OE бўлган ташқи айлана чизиш мумкин. Демак OKBE тўрт бурчакка умумий бир айланани ташқи чизиш мумкин, унда $\angle OEK = \angle OBK$; худди шундай OCFK тўртбурчакка ҳам фақат битта айланани ташқи чизиш мумкин бўлади (ёки умумий гипотенузаси OF бўлган OKF ва OCF тўғри бурчакли икки учбурчакка умумий ташқи айлана чизамиз). Унда $\angle OFK = \angle OCK$ бўлади. Натижада айланага ички чизилган ва фақат OK ватарга тиралган бурчаклар қатори қуйидаги тўртта бурчак ўзаро тенг бўлишади:

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Шундай қилиб OEK ва OFK тўғри бурчакли учбурчаклар тенг бўлади, чунки *OK* кесма уларнинг умумий катети ва $\angle 1 = \angle 3$. Бундан EK=KF эканлиги келиб чиқади, бошқача айтганда талаб қилинган нарса исботланди.

2) Энди, тескарисидан, EK=KF бўлса, унда $OK \perp KF$ бўлишини исбот қиламиз. Вертикал бурчаклар бўлганлиги сабабли $\angle 5 = \angle 6$.

BKE ва CKF учбурчакларни кўриб чиқамиз. Синуслар теоремасига асосан AKE учбурчакдан.

$\frac{EK}{\sin\angle B} = \frac{EB}{\sin\angle 5}$ га ва CKF учбурчак дан $\frac{KF}{\sin\angle 7} = \frac{FC}{\sin\angle 6}$ га эга бўламиз, бироқ $\angle 5 = \angle 6$ ва $\angle EBD = 180^0 - \angle 7$ бўлганлиги сабабли охирги икки нисбатни қуйидагича ёза оламиз:

$\frac{EK}{\sin\angle B} = \frac{EB}{\sin\angle 5}; \frac{KF}{\sin\angle 7} = \frac{Fc}{\sin\angle 6}$ ёки $\frac{EK}{\sin\angle 7} = \frac{EB}{\sin\angle 5}$ ва $\angle 5 = \angle 6$;

$\sin(180^0 - \angle 7) = \sin\angle 7$ бўлганлигидан $\frac{EK}{\sin\angle 7} = \frac{EB}{\sin\angle 5}$;

$\frac{KF}{\sin\angle 7}=\frac{FC}{\sin\angle 6}$ агар EK=KF бўлган шартни қўлласак, бу икки тенгликдан $\frac{EB}{\sin\angle 5}=\frac{FC}{\sin\angle 5}$, бундан EB=FC эканлиги келиб чиқади, энди EBO ва FCO тўғри бурчакли учбурчакларни олиб кўрсак, унда уларнинг катетлари тенг: EB=FC, OB=OC ва $\angle OBE=\angle OCF=90^0$. Бу учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг гипотенузаларининг OE=OF эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб тенг ёнли OEF учбурчакдаги $OK\perp EF$ бўлади. Талаб қилинган нарса исбот қилинди.

ЖАВОБЛАР

7-СИНФ

I -БОБ

1–§.

13. б) 6; в) $B \in ND, B \in AC$; г) ётмайди. **14.** а) уч; б) уч. $M \notin NP$. **16.** Тўрт. **17.** Тўрт. **18.** CA ва CE; DB ва DA. **19.** OA билан CD кесишади. OA билан EF ва CD билан EF кесишмайди. **20.** а) 10; б) E,C,A бир томонда, B иккинчи томонда ётади. E билан B, C билан B, A билан B нуқталари D нинг турли томонларида ётади. **21.** а) 3; б) 12; **25.** а) кесишади; б) кесишмайди. **26.** 7 бўлакка.

2–§.

2. Нуқта. **4.** Тўғри тўртбурчакнинг ва учбурчакнинг. **5.** Бўлади. **6.** Бўлади. **10.** Нуқта. 11. AB нур. **13.** Бўлади. **16.** Бўлади.17. Бўлади. **18.** Нуқта. **19.** 7см. **20.** 4 см. **22.** Икки нуқтада кесишади. **23.** Бир. **24.** Йўқ. **26.** Кўрсатма. O ва O_1 марказлари мос тушадиган қилиб устма-уст қўйиш керак.

3–§.

1. Уч. **2.** а) уч; в) MD; г) MN. 3. Улар тенг бўлади. **4.** Устма- уст қўйиш орқали. **6.** KL ва EF. **7.** AB=4 дм; 8,8 см; 4 см. **9.** EQ= 5см 5мм; $EQ>PE$. **12.** 1 дм. **13.** а) 7,5 см. **14.** 1,8 м. **15.** 7 м. **16.** 1,5м. **17.** Ётмайди. **18.** AB=1,1; AC= 5,6. **21.** $ABD>ACD$. **23.** 1345км; 405 кмга камаяди. **24.** а) Ётмайди; б) ётади; в) ётади; **25.** Бўлмайди. **26.** Берилган тўғри чизиқларни қўшиб ҳисоблаганда, ҳаммаси -6.

4– §.

2. Уч. **3.** а) A,B; б) M, C,L; в) D,K. **4.** а) DK; AB. б) CM; в) BC,AL. **5.** Ёйиқ бурчакни ҳосил қилади. **6.** Кўрсатма: CO нурни тўлдирувчи нурни чизинг. **7.** Ёйиқ бурчакни ҳосил қилади. Масала иккита ечимга эга, OC нурнинг қайси ярим текислигида олинишга боғлиқ. **8.** а) Тўрт; б) $\angle AOB, \angle BOA_1, \angle A_1OB_1, \angle B_1OA$; в) $\angle A_1OA_1$ ва $\angle BOB_1$. **9.** Ўткир. **10.** Тўғри. **11.** Ўткир.**12.** Тўғри. **13.** $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE; \angle ABE > \angle ABC$.
14. $\angle CBE = \angle ABE - \angle ABC, \angle ABE > \angle CBE$;
18. $\angle AOB$ - ўткир, $\angle CDE$ - тўғри; $\angle FKL$ - ўтмас, $\angle MNP$ - ёйиқ бурчак. **20.** 1) Ўткир; 2) ўтмас; 3) ўтмас; 4) тўғри; 5) ёйиқ бурчак. **21.** 70°. **22.** 24°. **24.** 1) 135°; 2) 60°; 3) 162°. **26.** $\angle AOS = \angle COB = 35^0$. **28.** 130°, 130°, 50°. **31.** а) Ихтиёрий ярим текисликда ётади. Бундай нурлар чексиз кўп. б) Учлари

OA; *OB* нурларида ётган кесмани кесиб ўтади, ундай *OL* нурлар чексиз кўп ва улар *OB* нур ётган ярим текисликда ётади. **32.** 5) 45°; 6) 30°45′. **33.** б) 4°; 0,5°; 6°. **34.** а) $\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{1}{6}$. б) $\frac{1}{6};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{12}$. **35.** а) 31°; 105°; б) 72°; 210°. **36.** 132°. **37.** 1) 58°,122°; 2) 118°; 62°; 3) 45°; 135°. 4) 120°; 60°. **38.** а) 35°; 35°; б) 45°; 135°; в) 72°30′; 107°30′. **39.**а) 70°; б) 25°. 40. 144° ва 36°. **43.** 30°; 40°, 50°; 60°. **44.** $1\frac{5}{8}d$ (бунда $d=90^0$). **47.** а) 180°; б) 60°. **48.** $\overset{\cup}{AB}=45^0;\overset{\cup}{BC}=60^0;\overset{\cup}{AC}=150^0$

50. а) 60°; б) 45°; в) 30°; г) 10°.

I бобга доир масалаларнинг жавоблари

1. 1) *B*, 2) *C*; 3) *B* ва *C*. **2.** 1) 6; 2) *AB+BC+CD*; 3) *BC+CD*. **3.**1) 4; 2) **4**. **4.** Икки марта ва бир марта. **5.** 75° ва 15°. **6.** 20° ва 160°. **7.** 70° ва 110°. **8.** а) 50°; б) 90°. **10.** 140° ва 80°. **11.** 140°.

II БОБ

5 –§.1. а) $AB\|CD,\ AB\|ED$; б) $ON\|EM$; $OF\|EM$. 6. Параллел. 7. Бўлади. 8. Бўлади, чексиз кўп.

6 –§.1. а) 85° ва 70°. б) 200°; в) 15°. 3. 65° ва 115°. 4. 61°30′. 5. 60°. 6. а) Бўлади; б) бўлади. 7. $\angle B$ ни 58°га орттириш керак. 9. 110° ва 70°.

7–§.4. a ва ℓ тўғри чизиқлар *B* нуқтада кесишса, *AB* кесманинг узунлиги изланаётган оралиқ бўлади. 8. а) $AD\|BE\|CF$; б) $AD\perp AB,\ AD\perp AC$, $AD\perp BC$ ва бошқалар. 10. 43° ва 62°.

8 –§.1. Параллел бўлмайди. 2. а) $\angle BKL$ ва $\angle DLF$; $\angle EKA$ ва $\angle KLC$ ва бошқалар. б) $\angle BKL$ ва $\angle AKE$; $\angle CLF$ ва $\angle BKE$ ва бошқалар. 6. 180°. 7. 52°, 128° ва 128°. 8.135° ва 45°. 9. 36° ва 144°. 10. 43° ва 133°.

III БОБ.

9– §.

2. 3 учбурчак. 3. $KL\angle LF+FK, LF\angle FK+KL, FK\angle KL+LF$. 4. а) Мумкин; б) мумкин эмас; в) мумкин; г) мумкин эмас. 5. 18 см; 28 м; 6. а) 268 м; б) 308 м. 10. Мумкин эмас. 11. 126 дм.

10 –§.

1. а) Мумкин эмас; б) мумкин; в) мумкин эмас. **2**. а) 100^0; б) 90^0; в) 9^0. **3**. 72^0; 80^0; 28^0. **4**. 35^0; 80^0; 65^0. **5**. 60^0; 50^0; 70^0. **6**. 80^0; 40^0; 60^0. **7**. 84^0. **8**. 15^0. **9**. 60^0. **10**. 70^0; 20^0; 90^0. **11**. 80^0. **12**.70^0. **13**, 95^0 ва 35^0. **15**. $\angle A = 40^0; \angle B = 60^0; \angle C = 80^0$. **16**. 60^0. **18**. 60^0.

11–§.

9. 20 см. **10**. 12 см.

12– §.

1. а) 2), 4) ҳоллар; б) 3) ҳол; в) 1) ҳол. **2**. 1) 17 см; 2) 21 см; 3) 15 см; 4) 31 дм; 3. а) 26 см; б) 17 м; **4**. а) 7,3 дм; б) 10 дм; в) 6 дм; 6 дм; 8,6 дм; г) 9,5 дм; 9,5 дм, 1,6 дм; 5; 18,6 см. **6**. 10,8 дм. **7**. 12 дм; 12 дм, 2 дм. **9**. 16 дм. **10**. 16 дм. 16 дм. **11**. $52^030'$ ва $52^030'$. **12**. 81^0. **14**. 40^0.**15**. 10^0. **16**. $52^030'$; $52^030'$ ва 75^0. **19**. 44^0; 68^0; 68^0 ёки 52^0; 52^0; 76^0. **20**. а) 20^0; 80^0; 80^0; б)30^0; 30^0; 120^0. **21**. а) $\angle B$; б) $\angle A = \angle C$. **24**. 1) 64^0; 58^0; 58^0 ёки 64^0; 64^0; 52^0. 2) 80^0; 50^0; 50^0 ёки 80^0; 80^0; 20^0.

13 –§.

1. 90^0. **2**. 45^0; 45^0. **3**. 1) 72^0; 2) 34^0. **4**. а) 8дм; б) 14 дм; в) 14 дм ва 7 дм. **5**. 9м. **6**. а) 13 см; б) 2,4 дм ва 1,2 дм. **8**. 1) 7^0; 2) 90^0; 45^0; 45^0. **9**. $\angle B = 90^0$. **17**. 60^0. **18**,85^0. **20**. 6,2 дм ва 6,2дм. **21**. Тенг ёнли. **22**. 1) 12,4 дм. 2) 12,4 дм. **23**. 1) 8,2 дм. 2) 8,2 дм. **24**. 8,8дм. **25**. 10,5 дм.

14– §.

1. а) 90^0; б) 45^0. **2**. а) 180^0; б) 90^0. **3**. а) 120^0 ва 60^0; б) 72^0 ва 36^0. **4**. 19^0. **5**. 140^0. **6**. 40^0 ва 80^0. **7**. а) 70^0 ёки 110^0; б) 18^0 ёки 162^0. **8**. 36^0. **9**. 7,5 дм. **10**. 30^0 ва 150^0. **11**. 100^0. **12**. 30^0. **13**. 110^0 ва 70^0. **14**. $101^015'$. **15**. $56^015'$. **16**. 144^0. **17**. 20^0. **18**. $10^0\ 30'$. **19**. 30^0. **20**. 120^0 ва 60^0. **21**. $33^020'$. **22**. 108^0; 60^0; 12^0.

15– §.

1. 1) 2; 2) 1; 3) $OD<r$ бўлса, кесишмайди. $OD>r$ бўлса, бир нуқтада кесишади. **2**. 1) 2; 2) 1; 3) бўлмайди. **4**. Иккита умумий нуқтага эга бўлади. **5**. 60^0 ва 120^0. **6**. 9 дм ва 1 дм. **7**. 1,5 дм. **8**. 20 дм. **9**.Ташқи уринади; 2) ички уринади; 3) бири иккинчисининг ташқарисида ётади. **10**. $2(r+r_1+r_2)$ ёки $2r$ (агар r радиусларнинг каттаси бўлса).

III БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1. Мумкин эмас. **2**. 116 дм. **3**. 30^0; 60^0; 90^0. Тўғри **бурчакли** учбурчак. **4**. 150^0; 120^0; 90^0. **7**. 60^0. 18. а) 9 см; б) 9 см; в) 4,5 см ва 13.5 см. **19**. 60^0. **20**. $67^030'$ ва $112^030'$. **21**. Учбурчакнинг икки томони 4 ярим айлана 3 та тенг бўлакка бўлинади. **24.** Иккита умумий нуқтага эга бўлишади. **25.** Тенг ёнли.

IV БОБ

16– §.

8. Айлана. **9.** ABкесма ўртасидан ўтиб, унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ. **10.** Бурчак биссектрисаси. **13.** а) перпендикуляр икки тўғри чизиқ; б) Берилган тўғри чизиқларга параллел тўғри чизиқ.

18– §.

1. Mнуқтадан ℓ тўғри чизиққача оралиқ dбўлсин. $a>d$бўлса, масалани иккита ечими; $a=d$ бўлса, битта ечим бўлади. $a<d$бўлса, масала ечимга эга бўлмайди. **2.** а) $a+b\geq AB$ бўлганда; б) $a+b<AB$ бўлганда. 4. Айлана.

19– §.

4. Берилган параллел икки тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ бўлади. **5.** Берилган тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ бўлади. **6.** Берилган бурчак биссектрисаси бўлади.

20 –§.

5. Маркази гипотенуза ўртасида ётади. **10.** Ички (ташқи) чизилган айланаларнинг марказлари устма-уст тушади.

8-СИНФ

V БОБ

21– §.

2. 37 см. **4.** Мумкин эмас. **5.** 16 м. 7. 12 дм, 15 дм, 24 дм. 6 дм. **8.** Мумкин эмас. **9.** 248^0. **11.** 72^0; 120^0; 144^0; 24^0; **12.** $\angle A=72^0$; $\angle B=84^0$, $\angle C=94^0; \angle D=108^0$ бўлиб, $\angle A+\angle D=180^0$ ёки $\angle B+\angle C=180^0$, шунинг учун $AB\| DC$. **13.** 120^0; 168^0; 48^0; 24^0.

22– §.

2. 1) 20 см; 2) 37 м; **3.** 1) 48 дм; 2) 52,8дм; 3) 31 дм. **4.** а) 6,2 дм; б) 2,2 дм. **5.** 1) 8 см ва 4 см; 2) 3 см ва 9см; 3) 8 см ва 4см. **6.** 1) 4 см ва 8 см; 2) 7,2 см ва 4,8 см. **7.** 42^0; 138^0; 42^0; 138^0. **8.** а) $97^030'$ ва $82^030'$; б) $86^015'$ ва $93^045'$; в) 120^0 ва 60^0. **14.** а) Мумкин эмас; б) мумкин; в) мумкин эмас; г) мумкин эмас. **15.** 12 дм ва 5 дм. **16.** 62 см. **17.** 64^0 ва 116^0.

22.1. –§.

3. а) 26 см; б) 50 дм. **4.** а) 55 м; б) 66 м; в) 75 м. **5.** а) 7,5 м ва 4,5м. б) 5м ва 7 м; в) 4м ва 8м. **6.** а) 4,8 дм ва 11,2 дм. б) 10 дм ва 6 дм. **7.** а) 3 м га ортади (камаяди). б) 8 м га ортади (камаяди). в) 2 марта ортади (камаяди). **8.** 72°. **9.** 50°. **10.** 1,2 м; **12.** 20 см. ва 12 см. **14.** 11 дм.

22.2.– §.

2. 26 дм. **3.** 9,1м. **4.** 60° ва 120°. **5.** 42°; 138°; 138°. **8.** 75° ва 105°. **9.** 40° ва 140°. **10.** 60° ва 120°. **11.** 150°.

22.3.– §

3. 30 см. **4.** 0,8 м. **7.** а) 18 смга ортади. б) 12 смга кичраяди. в) 3 марта ортади. г) икки марта кичраяди. **8.** 8дм. **9.** 4дм. **11.** а) Маркази диагоналлар кесишган нуқтада, радиуси диагоналнинг ярмига тенг бўлади; б) маркази диагоналлар кесишган нуқтада, радиуси диагонал ярмига тенг бўлади.

23–§.

2. Кўрсатма: Фалес теоремасидан фойдаланинг. **3.** а) берилган кесманинг бир учидан қўшимча нур ўтказинг, унга бир-бирига тенг бўлган 4та кесмани ўлчаб қўйиб, сўнг Фалес теоремасини қўлланинг. б) а) ҳолдагига ўхшаш. **5.** 4дм. **6.** 3-масала ечилишига ўхшаш.

24– §.

2. 28 дм. **3.** 17 дм, 22 дм, 27 дм. **4.** 68° ва 115°. **5.** Мумкин эмас. **8.** 46 см. **9.** 62° ва 112°. **10.** а) Икки асосининг айирмаси ён томонларининг йиғиндисидан кичик бўлганда ечими бўлади. **11.** б) Диагоналлар йиғиндиси асослари йиғиндисидан катта бўлганда ечими бўлади, 60° ва 120°. **12.** 3м. **13.** 6,5 дм. **14.** 34 см ва 18 см.

25 –§.

1. а) 6 дм; б) 9 см. **2.** 3м; 4,5м; 6,5м. **3.** 10 дм, 14 дм ва 20 дм. **4.** 12м. **5.** 30дм. **7.** 2,4 дм; 1,8 дм; 3 дм. **8.** 3,5 дм. **12.** 4м ва 2 м. **15.** 7,5 дм. **16.** 13 дм ёки 5дм. **17.** 28,8 дм ва 19,2 дм. **19.** 14м ва 6м. **20.** 1:2. **21.** $\frac{3}{4}a$; 22. $d-h(d>h)$ ва $d+m$. **23.** 8,5дм. **24.** 1,2 м ва 2,8 м. **25.** 4,6дм. **26.** Диагоналларнинг ҳар бири баландлигидан кичик ёки унга тенг бўлганда масала ечимга эга бўлади

V БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1. 18°, 162°, 54° ва 126°. **3.** 5см ва 1см. **4.** 60° ва 120°. **6.** $\frac{a-b}{2}(a>b)$. **7.** 6дм ва 8дм. **8.** 145° ва 135°. **9.** 9см ва 5 см.

VI БОБ

26– §.

7. а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; в) $tg\alpha = \frac{4}{3}$; г) $ctg\alpha = \frac{3}{4}$.

8. а) $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{4}{5}$; б) $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{3}{5}$; в) $tg\frac{\beta}{2} = \frac{3}{4}$; г) $ctg\frac{\beta}{2} = \frac{4}{3}$.

27– §.

1. а) 5см; б) 1м; в) 10,9 дм. **2.** 4м. **3.** 10 дм. **4.** 60 см. **5.** а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; **6.** а) 5м; б) 10см; в) 1,3 дм. **7.** 12 дм. **9.** а) 6см, 10 см ва 3,6 см; б) 8дм; 10 дм ва 6,4 дм; в) $\sqrt{42}м$, $\sqrt{58}м$ ва 10 м. **12.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; **13.** 16 см ва 12 см. **14.** 12 см. **15.**а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3m}}{3}$. **16.** 8 дм. **17.** $\sqrt{ab+c^2}$.

28– §.

1. а) 3; б) $\sin\alpha$; в) $\cos^2\alpha$; г) $-\cos\alpha$; **2.** а) $\sin\alpha$; б)2; в) 1; г) $2\sin\alpha$.

6. 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $tg\alpha = \frac{3}{4}$; $ctg\alpha = \frac{4}{3}$. 2) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$; $tg\alpha = \frac{11}{60}$; $ctg\alpha = \frac{60}{11}$.

3. $\sin\alpha = 0{,}6; tg\alpha = \frac{3}{4}$; $ctg\alpha = \frac{4}{3}$. **7.** 1) $\cos = \frac{3}{5}; tg\alpha = \frac{4}{3}$; $ctg = \frac{3}{4}$.

2) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; $tg\alpha = \frac{15}{8}; ctg\alpha = \frac{8}{15}$. 3) $\cos\alpha = 0{,}8$; $tg\alpha = \frac{3}{4}; ctg\alpha = \frac{4}{3}$.

29 –§.

1. $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$; **2.** $\cos 30^0 = \sqrt{3}:2$; $tg30^0 = \sqrt{3}:3; ctg30^0 = \sqrt{3}$.

3. $\cos 60^{0} = \frac{1}{2}; \sin 60^{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}; tg 60^{0} = \sqrt{3}; ctg 60^{0} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

4. $\sin 45^{0} = \frac{\sqrt{2}}{2};$ $\cos 45^{0} = \frac{\sqrt{2}}{2}; tg 45^{0} = 1; ctg 45^{0} = 1.$

5. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. $\frac{3}{2}$. 7.1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2)1.

30.1– §

1. а) Бурчак синусининг қийматлари: 1) 0,5736; 2) 0,3120; 3) о,6554; 4) о,9659. 5) 0,9964; б) Бурчак косинусининг қийматлари: 1) 0,8192; г) 0,9477; 3) 0,7555; 4) 0,2588; 5) 0,0837. **2.** а) Бурчак тангенснинг қийматлари: 1) 0,3739; 2) 0,7002; 3) 0,8466; 4) 1,6003; 5) 6,140; б) Бурчак котангенсининг қийматлари: 1) 2,675. 2) 1,4282; 3) 1,1813; 4) 0,6249; 5) 0,1599. **3.** Қийматлари бир хил. **4.** а) бир хил; б) бир хил; ҳар бир ҳолдаги бурчаклари йиғиндиси 90^{0}. **5.** а) $\sin 40^{0} < \sin 70^{0}$; б) $\cos 20^{0} > \cos 60^{0}$; в) $tg 30^{0} < tg 45^{0}$. **6.** а) 70^{0}; б) $24^{0}36'$; в) 16^{0}; г) $30^{0}2$; д) 10^{0}; е) $50^{0}30'$.

30.2.– §

1. 1) 0,2588; 2) 0,5; 3) 0,6494; 4) 0,8729; 5) 0,9678. **2.** 1) 0,9272; 2) 0,7986. 3) 0,6756; 4) 0,3827; 5) 0,1708. **3.** а) 5,2017; **4,**6837; б) 36,4702; 19,8038; в) 2,1867; 10,5145.

30.3.– §

1. а) 10; $53^{0}7'$; $36^{0}53'$; б) 50; $36^{0}52'$; $53^{0}8'$; в) 4,5853; $71^{0}26'$; $18^{0}34'$; г) 62,7; $11^{0}19'$; $78^{0}41'$. **2.** а) 8; $36^{0}53'$; $53^{0}7'$; б) 16; $75^{0}45'$; $14^{0}15'$. в) 4,55; $49^{0}15'$; $40^{0}45'$; г) 14,989; $61^{0}16'$; $28^{0}44'$. **3.** 25,22; $53^{0}30'$; 20,27; б) 5,65; $47^{0}45'$; 4,182; в) 11,445; 34^{0}; 9,49; г) 37. 62; $71^{0}24'$; 35,65. **4.** а) 64,568; $54^{0}24'$; 37,585; б) 462,7; $65^{0}12'$; 194,1. в) 119,8; $38^{0}45'$; 93,43; г) 12,16; $28^{0}45'$; 10,66. **5.** а) 5,948; 8,039; $53^{0}30'$; б) 33,75; 25,99; $37^{0}36'$; в) 0,5117; 1,6735; 17^{0}; г) 0,5335; 0,5969; $41^{0}45'$. **6.** 7,6 м; $63^{0}28'$; $63^{0}28'$; $53^{0}4'$. **7.** а) $67^{0}20'$ ва $112^{0}40'$; б) $29^{0}50'$ ва $150^{0}10'$. **8.** 7м ва 4,3 м.

VI БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

2. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^{2}\alpha$. 3) 1. **4.** 1) 60^{0}; 2) 45^{0}; 3) 60^{0}. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 3,9м.

9. а) 15 дм; 7,2 дм; 5,4 дм; 9,6 дм. б) 0,5 дм; 0,46 дм; 0,1 дм; 0,2 дм. **10.** а) 9,2 м; б) 6м.

VII БОБ

31. –§.

2. 15 см. **4**. I-қавариқ бешбурчак; II-ботиқ олти бурчак. **5**. 6 учи, 6 томони; 6 бурчаги ва 3 диагонали бор. **6**. а) 2; б) 5; в) $n-3$; **7**. а) 4; б) 7; в) 18; **8**. а) 5; б) 20; в) $\frac{1}{2}n(n-3)$.

32– §.

1. а) 540^0; б) 1080^0; в) 3240^0. **2**. 140^0; 80^0, 120^0, 160^0, 100^0, 120^0. **3**.540^0 га ортади. **4**. а) 5; б) мумкин эмас. в) 22. 5. $2k+2$.

33 –§.

1. Учбурчак, 60^0. **2**. а) $7a$; б) $12a$; в) na. **3**. 1) 720^0; 2) 120^0; 3) 60^0; 4) 360^0; 5) 3; 6)9; 7) 4,1 дм. **4**. 1) 9; 2) 12; 3) 30. **5**. 1) 20; 2) 30; 3) 12. **6**. 1) 360^0; 2) 540^0; 3) 1440^0; 4) 1800^0. **7**. 1) 90^0; 2) 108^0; 3) 144^0; 4) 150^0. **8**. 1) 2; 2) 5; 3) 35; 4) 60.

34– §.

34.1.

1. а) Ички чизилган тўртбурчак; б) ташқи чизилган тўртбурчак; **3**. $2a$. **5**. 2,5 м. **9**. а) Бўлади; б) бўлмайди. **10**. 8 м; 10 м; 14м; 12 м.

34.2.2. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a}{2}$. 3. а) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. 6. а) 72^0; б) 45^0; в) 24^0; г) $7^030'$; д) 360^0:n. 7. 1) 12; 2) 90. 13. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a}{2}$; 3) a; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 14. 4,08 дм ва 3,3 дм. 16. 1) $R\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}R$; 2) $R\sqrt{2}$; $2R$; 3) R; $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 17. 5,56 м ва 5,85 м. 18. $r = R\cos\frac{180^0}{n}$ (r - ички, R - ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари). 19. $\approx 12{,}11$ см. 20. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. 21. $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$.

35– §.

1. 1) 125,6 см; 2) 34,54 дм; 3) 75,36 м. **2**. 1) 56,5 см; 2)8,79 м. **3**. 1) 10 дм; 2) 4 см; 3) 0,24 м. **4**. 1) 1,14 м; 2) 4,7 дм. **5**. ≈ 12700 км. **6**. ≈ 10915 км; **7**. ≈ 4371000км. **8**. Кўрсатма. Радиусини топиб, ихтиёрий нуқтани марказ қилиб айлана чизинг. **9.** 1) k марта ортади. 2) $2\pi a$ смга ортади. **10.** ≈ 188 м. **11.** 1) 12,6 см; 2) 8,4 см; 3) 31,4 см. 4) 9,5 см. 5) 15,8 см. **12.** 1) $0{,}48\ell$; г) $2{,}3\ell$. **13.** 2,5 см. **14.** $25^0 48'$. **15.** 9,5 м.

36 –§.

1. 2π. **2.** $114^0 34'$. **3.** а) 60^0; б) 90^0; в) 120^0; г) 360^0. **4.** а) $28^0 39'$; б) $11^0 27$ в) 180^0; г) $572^0 50'$. **5.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; **6.** $\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{3}$.

VII– БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1. $d+(R+R')$ ва $d-(R+R')$. **3.** Бўлади. $n=42$. 5. Бўлмайди. **8.** Бўлади. 12. **11**. 30^0. **12.** 15. **14.** а) $3a$; б) πa. **15.** ≈ 44 м. **16.** 23,55м. **17.** а) $\pi(2R+a)$ ва $\pi(2R-a)$; б) $R \cdot k$ ва $\frac{R}{k}$. **18.** 23,55 см. **19.** $2\pi a$.

VIII БОБ

37– §.

1. а) 0,1 кв.км; б) 100000 кв.м; в) 1000а. **2.** 1) 16 дм^2; 2) 8 м^2. 3) 396м^2; 4) 11га. **3.** 400 см^2. **4.** 20,25 дм^2. **5.** 100м. **6.** $d^2 : 2$. **7.** а) ;$2R^2$ б)$4R^2$. **8.** 2. **9.** 1) 16 марта ортади; 2) 6,25 марта камаяди. **10.** 1) $\sqrt{2}$ марта ортиши керак; 2) 3 марта камайиши керак. **11.** 12см; 45 см^2. **12.** 19788м^2 ёки 1,9988га ёки 197,88а. **13.** 4800м. **14.** 10дм ва 14 дм. **15.** 30 м ва 18 м.

38– §.

1. 11,7 дм^2. **2.** 7,5 см ёки 4,8см. **3.** Бўлади. **4.** а) 1,6м; б) 4м. **5.** а) 216 дм^2; б) $216\sqrt{2}$ дм^2; в) $216\sqrt{3}$ дм^2 **6.** $\frac{h_1 h_2 \cdot P}{2(h_1+h_2)}$; P - периметр, h_1, h_2 - баландликлари. **7.** $a \cdot d \cdot \sin \alpha$. **8.** 30^0. **9.** 20. **10.** 84 см^2. **11.** 4,24 дм. **13.** $72\sqrt{3}$ см^2. 14. $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}}$. **15.** а) $\frac{S}{2a}$; б) $2ra$. **16.** 3244,8 м^2. **17.** 4 см ва 6 см.

39– §.

1. 217,35 дм^2. **2**. а) 6м; б) 18. **4**. а) $8\sqrt{5}$ см^2; б) $\approx 3{,}9$ м^2. **5**. а) $\approx 35{,}5$ см^2; б) 81,9 см^2; в) 70,9 см^2; г) $\approx 80{,}4$ см^2. **6**. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **7**. $2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$. **9**. а) 3,6 м^2; б) 19см^2. **11**. Бир хил ясалган. **13**. 1) 60; 2) ; 3) 5,28; 4) 8 кв. бирлик. **14**. 20 м. **15**. $12\frac{12}{13}$ см; **16**. $\frac{3Rб\sqrt{3}}{4}$. **17**. $3r^2\sqrt{3}$. **19**. 1) 25,2; 2) 44,8; 3) 8; 4) 0,23 кв.бирлик. **21**. 1) 221,7; 2) 96.2; 3) 17,4; 4) 0,406 кв.бирлик. **22**. 2) $3r^2\sqrt{3}$ кв.бирлик. **24**. 1) 18,125; 2) 4,77; 3) 3,125; 4) 2,58 бирлик. 28. а) 6 кв. бирлик; б) 24 кв. бирлик.

40 –§.

1. 306 см^2. **2**. 0,8 дм. **3**. 2,5 см. **4**. 8 см ва 10 см. **5**. 405 м^2. **6**. 24дм^2. **8**. 1) $(88-16\sqrt{3}) \approx 60\sqrt{3}$ см^2 ; $(88\sqrt{2}-32) \approx 92{,}45$ см^2; 3) 144,8см^2; 4) 34,8 см^2; **9**. $\frac{k \cdot a}{6}$; **10**. 4,8 дм^2. **11**. 135 м^2. **12**. 1024 см^2. **13**. h^2. **14**. 0,8316 м^2. **15**. $\frac{R^2}{2}$. **16**. 1) 4; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; **17**. 1,56 дм^2. **18**. 49 кв.бирлик.

41 –§.

2. 186 см^2. **4**. $\approx 12\,м^2$; 7. 0,8дм. **8**. 40дм. **9**. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$; 11. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; 2) a^2; 3) $1{,}72a^2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$; 5) $\approx 11{,}2a^2$. **12**. 1) $4\sqrt{3}$ м^2; 2) 16м^2; 3) $\approx 27{,}52$ м^2; 4) $\approx 41{,}57$ м^2; 5) 179,2 м^2. **14**. 1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$; 2) $2R^2$; 3) $\approx 2{,}38R^2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$; 5) $3R^2$; **15**. 1) $3\sqrt{3}$ дм^2; 2) 8 дм^2; 3) $\approx 9{,}52$ дм^2; 4) $6\sqrt{3}$ дм^2; 5) 12 дм^2. **17**. 1) $3\sqrt{3}r^2$; 2) $4r^2$; 3) $\approx 3{,}63r^2$; 4) $2\sqrt{3r}^2$; 5) $\approx 3{,}36r^2$; 6) $\approx 3{,}31r^2$;7) 3,25r^2;

8) $3,21r^2$. **18.** 1) 519,6 см^2; 2) 400 см^2; 3) $\approx 363см^2$; 4) $\approx 346см^2$; 5) $\approx 336см^2$; 6) $\approx 331см^2$; 7) $\approx 325см^2$; 8) 321см^2.

42 –§.

1. 1) 706,5 см^2; 2) 78,5 дм^2; 3) $\approx 66,4см^2$. **2.** 1) $\approx 132,7см^2$; 2) 314 см^2; 3) 120,7 дм^2. **3.** 1) 8дм; 2) 1,5м. **4.** 0,785 м^2. **5.** 0,2м^2. **6.** 250,83см^2. **7.** 37,68 дм^2. **10.** 1) 1:4; г) 1:2; 3) 3:4; 4) $\approx 0,93$. **11.** 565,2 см^2. **12.** 1) 13,4 см^2; 2) 20,1 см^2; 67см^2. **13.** 1) $\approx 1,2\sqrt{Q}$; 2) $\approx 6,77\sqrt{Q}$; 3) $\approx 0,87\sqrt{Q}$. **14.** 80^0. **15.** 1) $\approx 0,275R^2$; 2) 0,09R^2 ; 3) $\approx 0,04R^2$; 4) $\approx 0,01R^2$. **16.** 1) $\approx 0,20a^2$; 2) $\approx 0,14a^2$; 3) $\approx 0,09a^2$.

VIII БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1. 7м; 8м. **2.** 156см^2. **3.** 480дм^2. **6.** $\sqrt{2}-1$. **9.** $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\cdot(3\sqrt{3}R^2$)ĕā.áĕд

10. $\frac{mn}{2}$. **12.** 37,5мм^2. **13.** 2. **14.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **15.** 4:1. **16.** $432\pi\, см^2$. **17.** $\frac{r^2}{2}(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$. **18.** 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})R^2$; 3) $(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2})R^2$.

9-СИНФ

IX БОБ

43– §.

2. а) (3; 0), (3;6), (-3;6) (-3;0); б) (3;0) (3;-6); (-3;-6) (-3;0). **3.** (3;0) ва (0;-2). **4.** 10. 5. $(-\frac{1}{2};1)$. **6.** (-2;4), (-2; 2,5), (2; -0,5). **7.** C(5; -3); D(1; -5).

44 – §.

1. а) 10 бирлик; б) 5 бирлик. **2.** 5 бирлик. **3.** $3\sqrt{5}$ бирлик. **5.**

а) $(13+\sqrt{145})$ бирлик; б) $2\sqrt{13}; 2{,}5; \sqrt{120{,}25}$. **6.** 10; $\sqrt{145}; 3; 2\sqrt{13}; 2{,}5; \sqrt{120{,}25}$. **7.** (0; -3); (0; -2).

45 –§.

1. $x^2+y^2=25$. **2.** 4 бирлик. **3.** $x^2+y^2=2{,}25$. **4.** *A* ва *D* нуқталари. **5.** 4. **6.** $(x+4)^2+y^2=9$. **7.** $(x-y)^2+(y+1)^2=4$ ётади. **8.** $(x-3)^2+(y\pm2{,}5)^2=6{,}25$.

46 –§.

1. $5x-7y-18=0$. **2.** $y=x$ *ва* $y=-x$. **3.** 4x+15y+9=0 **4.** а) 2x-*3б+10=0*, $x+y=0$, $4x-y=0$. б) $6x+y=0$; $3x-2y+5=0$ $y=2$. **5.** $5x-4y-20=0$, $5x-12y+20=0$. **6.** -3 ва 2. **7.** *A, C* ва *E* нуқталари.

47 –§.

3. б) тенг эмас, қарама-қарши векторлар. **4.** $\overrightarrow{AF}=\vec{m}$; $\overrightarrow{EF}=\vec{q}; \overrightarrow{ED}=\vec{p}$. **5.** $|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{m}|=3см$.

48–§.

1. б) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}; \overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. **3.** $\vec{p}+\vec{q}; \vec{q}; -\vec{p}; -\vec{p}-\vec{q}; \overrightarrow{2p}+\vec{q}$; $\overrightarrow{2p}+\overrightarrow{2q}$. **4.** $\overrightarrow{AB}=(-3;7)$. **5.** а) (-6; 15); б) (5; -12,5). **6.** а) (2; 7); б) (-1; 6); в) (0; 0); г) (13; -4). **7.** *B* (5; -3). **8.** а) 5; б) (3; -4). **9.** а) $\vec{C}(-1;-2)$; б) .

10. а)

49– §.

1. 1) 0;1; 2) 1; 0; 3) 0; -1. **2.** а) 0; 0; б) маънога эга эмас. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $3\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1; -1$; 3) $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}} -\sqrt{3}$,
7. а) 0,6428; 0,7660; б) 0,9890; -0,1478; в) 0,3156; -0,9488. **8.** а) -5,671; -0,1679.
$|\vec{c}|=\sqrt{5}$; $|\vec{c}|=\sqrt{157}$.
9. а) $143^0 8'$; б) $153^0 26'$. **10.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}; tg\alpha=-\sqrt{3}$.

50 -§.

1. 12. **3.** 2. **4.** 7. **10.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{50}; |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{8}$; $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{58}$; б) $\overrightarrow{AB}=(5;-5)$; $\overrightarrow{BC}=(-2;-2)$: $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$. **11.** а) $\overrightarrow{AC}=(2;8)$, $\overrightarrow{BD}(-8;2)$: $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ ва $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}=(5;3)$; $\overrightarrow{BC}(-3;5)$, $\overrightarrow{DC}(-5;-3)$; $\overrightarrow{AD}(-3;5)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

51 -§.

1. $b^2=a^2+c^2-ac$. **2.** 1) Ўткир бурчак; 2) тўғри бурчак; 3) ўтмас бурчак. **3.** 1) $\approx 11,6$; 2) $\approx 7,3$; 3) $\approx 1,58$. **4.** $\approx 93^0 42'$. **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{d^2+p^2\pm 2dp\cos\beta}$. **6.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\alpha}$. **7.** $36^0 53'$ **8.** $6\sqrt{2}$ см. **9.** 1) $14^0 29'$; 2) $14^0 23'$. **10.** 1) $a=144,7$; 2) $b\approx 21,3$. **11.** 7,8 см ва 16,3 см. **12.** 47,4 дм ва 78,85 дм. **13.** $\approx 3,8$ см ва 10,7 см. **14.** $45^0 44'; 134^0 16'; 110^0 3'; 69^0 57'$.

52– §.

1. 1) $409; 58'; 59^0 2'$; 2) 17,1; $65^0 33'; 37^0 47'$; 3) $215,5; 43^0 21'$; 4) $11,4; 11^0 54'; 27^0 54'$. **2.** 1) $75^0; 22; 26,9$, 2) $39^0 14'; 22; 12$. 3) $41^0; 4,1; 8$. 4) $102^0 11'$; 0,5; 1,6. **3.** 1) $32^0 6'$; $52^0 56'$; $94^0 58'$; 2) 95^0; $76^0 30'$; 3) $25^0 12'$; $96^0 30'$; $58^0 18'$; 4) $71^0 10'$; $37^0 40'$; $71^0 10'$. **4.** 1) $\gamma=62^0$; $\alpha=72^0 53'$; a=10,8; 2) $\beta=47^0 43'; \alpha=31^0 10'; a=3,43$; 3) $\beta=43^0 51'; \gamma=16^0 9'; c=32,1$; 4) $\alpha=26^0 17'; \gamma=73^0 26'; c=24,9$; 5) $\gamma=14^0 44'; \beta=154^0 16'; b=27,3$; 6) $\alpha=4^0 3'; \beta=168^0 27'; b=3,68$. **5.** a - энг катта, b - энг кичик. 6. β - энг катта; γ - энг кичик.

53 –§.

2. 10 дм. **7.** $m=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$. **8.** 1) AD=8м; DC=12м; 2) 10м; 3) 1,8 м. **9.** 8 см. **12.** $\cos\alpha=0{,}6;\cos\beta=0;\cos\gamma=0{,}8$.

IX БОБГА ДОИР МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

1. а) (6; 0); (0; 4); (-6; 0); (a -4); б) $\sqrt{52}$. **2.** 1) (0:0); (4; 0); (4;3); (0;3), 2) 5 бирлик; 4 ҳол. **3.** B(-3; -2). **4.** (-2; 3). **5.** б) $(2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$. **6.** а) Қарама-қарши; б) тенг; в) $\vec{0}$; г) $6\vec{a}$. **7.** а) $\vec{C}=(-1;-7)$; б) $\vec{U}(3,-7)$; в) $\vec{M}=(-1,4)$. **8.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-1$; 3) $\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$. $h_a=-\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)(p-c)};$ p- ярим периметр, $\ell_a=\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. **12.** $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p - ярим периметр. Қолган баландликлари шунга ўхшаш топилади. **13.** $R=\frac{a}{\alpha sin\angle A}$; $\angle A=\alpha$ ёки $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, p - ярим периметр. **14.** Кўрсатма. Икки векторнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланинг.

X БОБ

54–§. 54.1.

3. а) 4; б) 1. 7. $y=x+l$. **8.** $A'(1:-3);B'(-1;-2);C'(-3;-5)$ периметрлари: $\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{20}$. **16.** а) Чексиз кўп; б) чексиз кўп. **23.** O(1; -1). 24. $M'(2-3)$.

54.2.

5. а) $O'(3;-5); M'(7;1)$; б) $y+5=0$, в) $x-3=0$. **8.** Периметрлари тенг.

54.3.

9. а) $A_1(0;2); B_1(3;0)$; ; б) $A_2(0; -2)$; $B_2(-3; 0)$.

55–§.

2. бўлади. **7.** а) Параллелограммга; б) трапецияга; в) ромбга алмашади. **8.** $A_1(3; 0); B_1(0;6); C_1(-6;0)$; $D_1(0; -3)$.

56–§.

2. 3. **3.** 10 см. **4.** 16 дм; 20 дм. **5.** 0,9м; 1,8м. **6.** 1) $b_1 = 70; c = 16$; 2) c=60. **7.** 6,8 дм. **8.** 1) Бўлади; 2) бўлади; 3) бўлмайди. **9.** 10дм, 20 дм ва 25 дм. **10.** 65дм ва 55 дм. **11.** 1) 14 см; 2) 4см; 3) 27:28. **17.** 3 дм; 2,4дм; 1,8дм; 3,6 дм. **18.** 1,8 м; 0,9м; 1,2м; 3,6м. **19.** 0,8м; 1,2м; 1,6; 2м. **20.** 10м ва 4м.

57– §.

1. а) 9 марта ортади; б) 16 марта камаяди. **2.** 1) 4 марта ортади; 2) 9 марта камаяди. **3.** $a^2 : b^2$. **4.** Икки марта. **5.** $8\sqrt{3}$ см. **6.** 9:1; 9:4. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}h$.

8. 64 см^2; 144 см^2; 256 см^2. **9.** $a^2 : b^2$. **10.** $1 : \cos^2\frac{180^0}{n}$. **11.** 1) 4; 2) $\frac{4}{3}$.

X бобга доир масалаларнинг жавоблари

1. Ўзаро бир қийматли (гомотетик). **2.** Ўзаро бир қийматли. **3.** AB кесманинг нуқталари MNга ўзаро бир қийматли, CDга ўзаро бир қийматли эмас, мос келади. **4.** Бир қийматли эмас. **5.** а) Битта; б) чексиз кўп; в) чексиз кўп; г) учта. 6. а) Битта; б) чексиз кўп. 11. $k \cdot k_1$; $k \cdot k_2$ - ўхшашлик коэффициентлари. **13.** 4. **14.** $a : b$. **15.** 15см; 12см. **16.** 100см ва 60 см.

Планиметрия бўйича қийинроқ масалаларнинг жавоблари

3. $\sqrt{0.5(a^2 + b^2)}$. 4. $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

6. $S = 1 : \sqrt{(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c})...\times(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c})}$, h_a, h_b, h_c -

баландликлар. **7.** $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$, $b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}$, $c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$, m_a, m_b, m_c - учбурчакнинг медианалари, a, b, c - томонлари. **8.** $AD=\pm\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S}$; $BD=\pm\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{4S}$, $CD=\pm\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4S}$, ABC учбурчакнинг юзи S, оғирлик маркази – *D*, *AD, BD,CD* - изланаётган оралиқлар. **9**. 8-масаланинг ечимидан фойдалансак, изланаётган оралиқлар AD:2, BD:2, CD:2 бўлади. **10**. $R^2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6})$. **15.** $\frac{\sqrt{3}(d^2-c^2)}{12}$. **16.** $a^2(1-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$.

XI БОБ

58– §.

3. A_1D_1; B_1C_1; CC_1 ва DD_1. **4.** Параллел; 2) кесишади.

59– §.

1. Тўғри бурчак. **2.** 4см ва 8см. **3.** Тенг тўғри бурчакли иккита учбурчак бўлади. **4.** 12см, 10см ва 20см, 6см. **5.** Тенг ёнли учбурчак. **6.** 1) Мумкин эмас; 2) мумкин эмас. **7.** Доира. **8.** 1) 8дм, 3дм, 5дм; 2) 6дм, 4дм, 5дм. **9.** 12см, 6см, 8см. **11.** Айлана. **12.** Доира. **13.** Радиуси 2 см бўлган доира шар марказига яқин бўлади. **14.** 62,8см.

60– §.

2. 1) Олтибурчак; 2) олтита. **3.** Тенг бўлади. **4.** 10; 7; 15. **6.** 1) $\sqrt{2}a$; 2) $a\sqrt{3}$. **8.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **10.** 1) 7м; 2) 13,7дм. **11.** Бўлади, бешбурчакли призма. **13.** 66; 6;10. **14.** 1)2; 2) 5. **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(2\ell^2-a^2)}$. **16.** $2\sqrt{\ell^2-h^2}$. **17.** 7дм. **18.** 15см.

61– §.

2. 1) *F, K*; 2) *D.E.* **3.** 1) *Oz* ўқида; 2) Oy; 3) Ox. **4.** 1) *xOz* координаталар текислигида; 2) *xOy; 3)yOz.* 6. K_1(2;0;0), K_2(0;3;0), K_3(0;0; -4). 7. (0;0;0); (4;0;0), (0;4;0); (0;4;4); (4;4;4), (4;0;4), (0;0;4).

62– §.

1. 10 бирлик. **2.** 1) C(-1; 0; 4); 2) $AC=\sqrt{21}; CB=\sqrt{21}$; 3) 0,5 қисмини. **3.** 1) $2(\sqrt{29}+\sqrt{53}+2\sqrt{6})$; 2) $\sqrt{53}$. **4.** B(5; -1; -2). 5. 1) $(-1;-1;\frac{1}{2})$; 2) D(0; -6; 0). 3) $BD=\sqrt{105}$.

63 –§.

1. 150дм^2. **2.** 24 см^2. **3.** 3м. **4.** 1) 112 см^2; 2) 61,5дм^2. **5.** 1) 104 м^2; 2) 134м^2. **6.** 2d^2. **7.** 1) $\frac{\sqrt{6S}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{2S}}{2}$. **8.** 4см ва 2см. **9.** 78м^2. **10.** 1) 240дм^2; 2) 264 дм^2. **11.** 1) 160дм^2; 2) 208 дм^2. **12.** 288см^2. **13.** 13,1 дм^2. **14.** 1) 36м^2; 2) 59,4 м^2. **15.** 1) 36см^2; 2) 56см^2. **16.** 1) Уч марта ортади; 2) икки марта камаяди. **17.** 1) 27,9дм^2; 2) 1507, 2см^2. **18.** 2см ва 5см. **19.** $\frac{3a^2\pi}{2}$. **20.** 1) икки марта ортади; 2) уч марта камаяди. **21.** 1) 251см^2; 2) 9,2дм^2; 3) 2040см^2. **22.** 3дм^2. **23.** 1) 219,8см^2; 2) 310,86см^2. **24.** 1) 266,9см^2; 2) 734,76 см^2. **25.** 1) 803,8 см^2; 2) 314дм^2. **26.** 4. **27.** 1) $\approx 5{,}10\cdot 10^8$ км^2; 2) $\approx 1{,}5\cdot 10^8$ км^2.

64 –§.

1. 64см^2. **2.** 48 м^2. **3.** 216 дм^3. **4.** $360\sqrt{3}$ см^3. **5.** 4м. **6.** 108см^3. **7.** 1) $\approx 110{,}85$ дм^3; 2) ≈ 665дм^3. **8.** 1) $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$; 2) $\frac{a^2h}{3}$; 3) $\frac{a^2h\sqrt{2}}{2}$. **9.** 5м. **10.** 260см^3. **11.** 1) Уч марта ортади; 2) тўрт марта ортади. **12.** 1) 251,2 см^3; 2) 628дм^3. **13.** $\frac{c^2h}{4\pi}$. **14.** 15,7дм^3. **15.** 8см. **16.** 1) 260см^2; 2) 1304см^3; 3) 5,7дм^3. **17.** 576π дм^3. **18.** 10 см. **19.** 182π см^2. **20.** 1) 65,65 см^3; 2) 2150,4дм^3; 3) 4,2м^3; 4) 14,2дм^3. **21.** 27 марта ортади. **22.** 8. $(88\sqrt{2}-32)\approx 92{,}45$ $(88\sqrt{2}-32)\approx 92{,}45$

МУНДАРИЖА

7-синф

I *БОБ*. ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАРИ

II БОБ. ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

VII БОБ. КЎПБУРЧАКЛАР

VIII БОБ. ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗАЛАРИ

9-синф

IX БОБ. ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ВЕКТОРЛАР

X БОБ. ГЕОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР. ФИГУРАЛАРНИНГ ЎХШАШЛИГИ

XI БОБ. СТЕРЕОМЕТРИЯ ҲАҚИДА ҚИСҚАЧА МАЪЛУМОТЛАР

ҚЎШИМЧА МАЪЛУМОТЛАР

Учебное издание

Бекбоев Исак Бекбоевич, Борубаев Алтай Асылканович,
Айылчиев Асанбек Айылчиевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7-9 -классов средней школы с узбекским языком обучения

Третье издание

Бишкек, Издательство «Педагогика»

Окуу басылмасы

Бекбоев Исак Бекбоевич, Борубаев Алтай Асылканович,
Айылчиев Асанбек Айылчиевич

ГЕОМЕТРИЯ

Орто мектептин 7-9 - класстары үчүн окуу китеби
Үчүнчү басылышы

Бекбоев Исак Бекбоевич, Борубаев Алтай Асылканович,
Айилчиев Асанбек Айилчиевич

ГЕОМЕТРИЯ

Ўрта мактабнинг 7-9 - синфлари учун дарслик

Учинчи нашри дан таржима

Бош муҳаррир А. Уринбоев
Муҳаррир Ибрагимова Г.
Корректор А. Абдуғафуров
Терувчи Хошимова З.
Техник муҳаррир Тишабаева М., Аббасова Д.

Теришга 26.09.2011 рухсат берилди. Босишга 24.10.2011 имзо чекилди. Офсет қоғоз № 1. Формат 60x90 $^1/_{16}$ "Таймс" гарнитураси. Шартли босма тобоғи 19,5 вкл. тет. Нашриет ҳисоб тобоғи 19,5 вкл. тет. Адади 10000 нусха.
Баҳоси келишим асосида.

«KIRLand» масъулияти чеклангаи жамият босмахонасида босилди.
Қирғизистон Республикаси. Бишкек шаҳри. 1-Оламедин кичик мавзеси, 75-уй
Тел.: (0312) 63-01-10, факс: (0312) 63-39-56